Programmes de mathématiques du cycle 3 au baccalauréat
Audition du 27 juin 2024 par le Conseil supérieur des programmes

Ce document constitue le rapport et les recommandations de la Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM) suite à l'audition du 27 juin 2024 par le Conseil supérieur des programmes (CSP). Son objet porte sur la réécriture et la révision des programmes de mathématiques des cycles 3 et 4 et la définition de la nouvelle épreuve anticipée de mathématiques. Ce thème s'inscrit dans le cadre de la mise en œuvre des annonces du « choc des savoirs », conformément aux souhaits de la ministre de l'Éducation Nationale exprimés dans la lettre de mission du 13 mars 2024 auprès du président du CSP.

La CFEM est un lieu de réflexion et d'échanges sur l'enseignement des mathématiques. Elle est constituée de 12 composantes[1] réunissant les principaux acteurs français concernés. Elle produit et relaie des textes de réflexion et d'analyse à partir de son expertise scientifique et de ses connaissances du terrain. Elle siège au comité d'organisation du congrès de la commission internationale sur l'éducation en mathématiques[2] dont elle représente la composante française.

Synthèse générale des recommandations

1. ***Garantir la réussite de la mise en œuvre des programmes***
   - Impliquer les enseignantes et enseignants pour qu'ils puissent s'emparer des nouveaux programmes.
   - Expliciter les éléments de continuité pour permettre l'amélioration des pratiques sur le temps long. Maintenir en particulier
     - l'appui sur les six compétences transversales existantes, légèrement aménagées pour les rendre plus explicites[3] ;
     - une réflexion par cycle pour permettre d'installer les apprentissages des élèves dans la durée.
2. ***Identifier les objectifs pour élaborer des programmes efficaces***
   - S'appuyer sur les connaissances scientifiques, internationales, les rapports d'inspection et l'expertise du terrain pour l'analyse rigoureuse des points forts et faibles des programmes en vigueur.
   - Concevoir des programmes favorisant l'accès pour tous et toutes aux mathématiques et particulièrement au raisonnement, à l'argumentation et la preuve sans discrimination :
     - Expliciter les attendus visés et comment les évaluer, notamment en les illustrant par des d'exemples de situation d'apprentissage.
     - Favoriser des modalités de travail plus coopératives pour limiter la vision compétitive de la discipline et les stéréotypes induits.

[1] Académie des sciences ; Assemblée des directeurs d'Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (ADIREM) ; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) ; Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM) ; Comité National Français de Mathématiciens (CNFP) ; Femmes & Mathématiques ; Inspection Générale de l'Éducation du Sport et de la Recherche (IGESR) ; Institut Henri Poincaré (IHP) ; Société Française de Statistique (SfdS) ; Société des Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) ; Société Mathématique de France (SMF) ; Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques (UPS).

[2] ICMI, Affiliée à l'union internationale des mathématiques (IMU).

[3] Exemples d'axes transversaux déclinés en Pologne : raisonnement et argumentation ; pensée stratégique ; modélisation de problèmes en lien avec le réel

3. ***Travailler la résolution de problèmes[4] comme moyen pour e développer le raisonnement et l'argumentation.***
   - Réserver un temps suffisant pour une pratique régulière en développant le débat collectif.
   - Expliciter les modalités favorisant la prise d'initiative, les échanges, la constitution de traces écrites permettant l'appropriation méthodologique et son évaluation.
4. ***Verbaliser en mathématiques, une étape indispensable dans la construction du raisonnement et de la preuve écrite.***
   - Expliciter la nécessité de la prise en compte des productions intermédiaires restituant un énoncé ou des argumentations, pour permettre aux élèves de construire progressivement des énoncés mathématiques.
   - Renforcer le lien entre calcul et raisonnement au travers de la verbalisation.
5. ***Enjeux d'un baccalauréat de mathématiques***
   - Garantir un traitement équitable de l'enseignement des disciplines fondamentales :
     - même durée d'enseignement en mathématiques et en français pour tous en première générale ;
     - modalités d'évaluation analogues au français pour favoriser l'argumentation, le raisonnement et la coopération.
   - Évaluer des savoir-faire relevant de mathématiques citoyennes.

Et des points de vigilance

1. ***Verticalité des décisions, précipitation et ruptures, autant de facteurs d'échec pour la mise en œuvre***
2. ***Appui sur les seuls indicateurs internationaux : solution illusoire à l'amélioration des savoir-faire***
3. ***Accès au sens par la résolution de problèmes : être « concret » n'est ni nécessaire, ni suffisant.***
4. ***Formalisme excessif et prématuré : facteur de discrimination et de perte de sens.***
5. ***Certification en mathématiques : facteur d'aggravation des inégalités et du rôle sélectif des mathématiques, au détriment de son rôle formatif.***

1. Garantir la réussite d'une mise en œuvre et l'évolution des pratiques

L'introduction de nouveaux programmes est l'occasion de modifications de pratiques chez les enseignants. Ces modifications nécessitent une appropriation qui ne peut se faire que lentement, après plusieurs adaptations permettant la compréhension fine des nouvelles attentes. Elles doivent donc faire l'objet d'une continuité facilement identifiable par les acteurs et actrices de la mise en œuvre. Les informations institutionnelles des prescripteurs ne suffisent pas à l'appropriation des nouveaux programmes par les enseignants qui doivent pouvoir bénéficier de formations disciplinaires, didactiques et pédagogiques adaptées impliquant les professionnels de l'enseignement des mathématiques du secondaire, du supérieur, de la recherche et de la formation.
Deux nouveautés majeures ont fait leur apparition dans les programmes de 2015, pour lesquelles un gros travail a été fourni par les enseignants mais doivent garder une place particulière dans les futurs programmes.

- *Les six compétences transversales des mathématiques*

[4] Ce thème figure dans le compte-rendu, toujours d'actualité, des échanges avec la commission sur "les maths pour toutes et tous" en février 2023 pilotée par Xavier Sorbe. Les points principaux abordés portaient sur l'importance la dialectique abstrait-concret et la nécessité de disposer d'une variété de registres ; la nécessité de développer la formation en appui sur les résultats de la recherche.

L'identification de ces compétences ne va pas de soi. Leur appropriation a fait l'objet de beaucoup d'efforts par les enseignants qui commencent à les distinguer et à les articuler. Elles deviennent peu à peu des guides généraux dans l'organisation du travail dans la classe, même si elles restent encore trop souvent en concurrence avec les connaissances et les savoir-faire des programmes dans l'élaboration des progressions. Cette concurrence est amplifiée par la nécessité de « finir le programme », en particulier pour l'année de 3e en raison des épreuves du DNB[5]. Le contenu du programme doit donc laisser une vraie place au travail des compétences. Celles-ci sont également en lien avec l'activité mathématique propre (résoudre des problèmes, voir 3.) et avec les enjeux de maîtrise de la langue et les spécificités de son usage pour les mathématiques (voir 4.).

- *Les attendus de fin de cycle ou de fin d'année*
  la progressivité des apprentissages est souvent difficile à cerner. En 2016, les enseignants ont dû s'approprier l'usage des attendus de fin de cycle. Ils se sont adaptés en utilisant leur expertise du terrain pour construire des progressions cohérentes sur le temps long. Cela a pu être l'occasion de plus de concertation dans les équipes et au sein des bassins d'enseignement. Néanmoins les enseignants restent demandeurs de repères plus précis pour les guider. Mais ces repères ne doivent pas occulter le fait que certaines notions doivent être introduites tôt dans le cycle sans en demander dans un premier temps la maîtrise experte aux élèves. Conserver des attendus de fin de cycle peut donc maintenant aider les enseignants à concevoir des enseignements cohérents sur le temps long.

Recommandations

- *Ne pas surcharger des programmes* déjà lourds.
- *Développer les compétences transversales de mathématiques dans les programmes*, en les explicitant sur l'activité mathématique en général mais aussi en y renvoyant dans les détails des tableaux lorsque les savoir-faire et connaissances les impliquent plus spécifiquement.
- *Garantir et expliciter la progressivité dans les apprentissages*
  - Conserver dans les programmes les attendus de fin de cycle et donner aux enseignants des repères à la fois précis et souples dans le temps, leur permettant d'organiser leur progression de manière autonome.
  - Expliciter la distinction entre ce qui doit être compris et ce qu'il est possible et parfois nécessaire d'aborder en amont parmi ce qui figure dans les attendus des programmes. Préciser le statut des objets/savoirs/savoir-faire (introduction, manipulation, maîtrise) ; clarifier la nécessité d'aborder des notions de manière progressive sur le cycle.

Exemples de progressivité

- Le théorème des milieux, qui a disparu des programmes actuels, est un premier pas vers la conceptualisation du théorème de Thalès et gagnerait à être vu en amont. Ses nombreuses démonstrations possibles peuvent faire du lien avec les autres notions au programme de géométrie, et en particulier l'appui sur les propriétés d'aire et d'invariance par découpage et recollement.
- Travailler sur des cas de triangles isométriques dès la 5$^{\text{ème}}$, voire la 6$^{\text{ème}}$, sans avoir à ce niveau d'énoncé figé sur les triangles égaux permet de manipuler les notions d'invariance par déplacement. Ces axiomes implicites intuitifs pour les élèves fournissent des outils utiles pour raisonner (démontrer la valeur de la somme des angles dans un triangle ou les propriétés des parallélogrammes par exemple).

[5] Diplôme national du brevet des collèges

- La manipulation et le travail sur les fractions : les propriétés $\frac{ax}{ay}=\frac{x}{y}$ et $\frac{ax}{y}=a\frac{x}{y}$ sont vues d'abord en actes avec un aspect partition dès le cycle 3 non formalisé avec des fractions simples[6]. Elles sont un appui fondamental pour la compréhension de l'écriture décimale de position[7]. Même si cette formalisation et celle de son utilisation pour simplifier des fractions ne se fait qu'en 4ème, les utiliser tout au long des cycles 3 et 4 sur des exemples simples est un moyen d'amener progressivement la systématisation d'une manipulation a priori devenue familière de l'élève, permettant de faire le lien avec le formalisme littéral abstrait.

2. Identifier les objectifs efficaces : exploiter les connaissances scientifiques

Les évaluations internationales montrent pour les mathématiques en France une relative baisse de niveau, qui reste comparable à la moyenne des pays de l'OCDE dans PISA 2022 (mais au dessous de la moyenne dans TIMSS 2019).
Les points faibles pour les élèves sont :

- une faible prise d'initiative (et persévérance), régulièrement signalée dans les rapports ;
- une forte croyance dans le déterminisme face aux compétences mathématiques ;
- une forte discrimination sociale des performances en mathématiques ;
- une faible conscience de l'importance du travail coopératif, des élèves comme des enseignants.

Parmi les points forts, les élèves ont :

- une forte appétence pour les maths en primaire qui diminue au collège[8] puis remonte au lycée ; une angoisse dans la moyenne des pays de l'OCDE, assez forte.
- une bonne capacité à appliquer et à interpréter des résultats.

La littérature scientifique soulève la question de la dimension élitiste des mathématiques, avec des clivages provoqués par des mécanismes d'exclusion des mathématiques des filles et des milieux socialement défavorisés. Des discriminations liées au genre s'observent dans le cadre scolaire :

- dans la prise de parole, le temps de parole et le type de propos (plus de temps de parole aux garçons, une prise de parole orienté vers de la restitution pour les filles, de l'apport d'idées ou de raisonnement pour les garçons), de modalités de travail (compétitif favorisant les garçons, ou coopératif plus inclusif) ;
- dans la posture des enseignants vis-à-vis des attendus (parmi lesquels des attendus implicites liés à l'idée de la douance pour les mathématiques plus souvent attribuée aux garçons, avec un dénigrement de la dimension travail à laquelle les filles sont plus souvent rattachées) ;
- dans les énoncés en lien avec la vie quotidienne où on retrouve les stéréotypes usuels (l'homme ou le garçon est sur-représenté, travaille, gagne de l'argent, se déplace, joue, la femme ou la fille est sous-représentée, attachée à la sphère privée au soin des autres, à son apparence, à l'école)

[6] $3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$: trois fois deux cinquièmes c'est six cinquièmes, puisque par définition, $\frac{6}{5}$ c'est un cinquième reporté six fois… encore faut-il être explicite sur la définition de cette dernière écriture qui ne va pas de soi.
[7] $\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$: 30 centièmes est dix fois plus grand que 3 centièmes, c'est donc 3 dixièmes car le dixième est dix fois plus grand que le centième.
[8] D'après TIMSS 2015, le rejet et l'anxiété vis-à vis des maths en CM1 est plus fort à Singapour qu'en France où ils restent marginaux chez les élèves.

Recommandations

Favoriser le développement du raisonnement et la démarche expérimentale en mathématiques ; diminuer l'élitisme et les discriminations sociales et de genre qui en résultent :

- *Renforcer la place du raisonnement et de l'argumentation exprimée en langage naturel.* Réduire les exigences d'un formalisme prématuré, trop rigide, nuisible à la compréhension de l'articulation logique et à l'exploration. Les textes des programmes peuvent fournir des illustrations possibles de ce qui serait attendu.
- *Expliciter les critères d'évaluation* des attendus pour tous les élèves, en particulier concernant la démarche de preuve et sa trace écrite. Ces critères peuvent figurer dans les textes des programmes et être illustrés par des exemples concrets.

3. La résolution de problèmes mathématiques : pourquoi faire et comment ?

a. Favoriser le raisonnement, l'autonomie et la prise d'initiative

Il s'agit ici de développer la résolution de problèmes dans le cadre visé par la lettre de saisine de "travail visant à développer la rigueur, la maîtrise du raisonnement et à s'initier, dans des situations variées, à la pratique de la démonstration". La résolution de problèmes est à comprendre ici dans le sens d'une « démarche d'investigation », participant à mettre en place et à entretenir des conditions favorables aux apprentissages mathématiques. Elle diffère des activités d'entraînement à la reconnaissance de problèmes types consistant à associer les bonnes procédures à une typologie de situations. Il s'agit de mettre les élèves face à des situations inhabituelles pour lesquelles ils ne disposent pas de méthode de résolution toute prête et se trouveront en position de chercher.

Cette activité de résolution de problèmes en mathématiques ne se réduit pas à un format fixé, mais elle prend une diversité de formes qui contribuent à la construction d'une diversité de connaissances et compétences mathématiques, au travail du raisonnement, de l'argumentation et de la preuve, et plus généralement à une appropriation de la pratique des mathématiques. Il convient de bien distinguer la résolution de problèmes en mathématiques d'une « pédagogie de la découverte » où on laisserait l'élève découvrir ou apprendre tout seul. Ici, l'enseignant joue un rôle indispensable, notamment pour l'institutionnalisation des connaissances[9]. Mentionnons certaines formes bien connues, reconnues, expérimentées, pratiquées par une partie des enseignants :

- situations d'introduction de notions / situations didactiques, qui viennent problématiser et motiver l'introduction d'une nouvelle connaissance ;
- narrations de recherche pour développer la capacité à chercher, la créativité, la persévérance, et la communication ;
- situations pour chercher (problème ouvert, situations de recherche en classe) pour contribuer au développement des compétences de recherche et de résolution de problèmes, à la coopération et à l'échange scientifique, au doute,au débat scientifique et à la preuve ;
- situations de réinvestissement, pour explorer la portée et les limites de connaissances déjà construites dans un contexte donné ;
- activités liées à la modélisation, sur la base de problèmes issus de situations réelles ou des autres disciplines.

[9] Ceci correspond au "Problem-Based Learning" (PBL) mentionné dans le rapport de l'Union Européenne de 2007 : A Renewed Pedagogy for the Future of Europe.

Recommandations

- *Expliciter les objectifs de la résolution de problèmes* comme activité de recherche dans les programmes : développement de l'argumentation, du raisonnement mathématique et de la preuve.
- *Lister les différents formats de la résolution de problèmes* dans les programmes et les textes d'accompagnement et recommander leurs usages.

b. Modalités de mise en œuvre

Les compétences visées par l'activité proposée sont dépendantes de la manière dont celle-ci est mise en œuvre : phases de recherche individuelles, en (petits) groupes, partage d'idées et de conjectures, présentations orales, productions écrites par et pour la classe, phases de débats intermédiaires et finales, production de preuves… Le choix des outils mis à disposition des élèves est aussi très important. Le travail sur l'erreur dans ces activités est aussi indispensable pour permettre l'ajustement ou la réorganisation des connaissances des élèves.

Exemples

- Problème de « l'aire de baignade » : en fonction des moyens mis à disposition des élèves, diverses stratégies seront possibles ou non. Par exemple, l'usage d'un outil de géométrie dynamique peut, par tâtonnement, conduire les élèves à identifier l'optimum sans saisir l'intérêt de la modélisation algébrique. La mise à disposition d'un tableur ou d'un grapheur peut aider à chercher l'optimum de la fonction issue de la modélisation algébrique. Ce sont les choix d'interventions de l'enseignant qui permettent de prendre en compte les apports des différents outils afin d'atteindre les objectifs d'apprentissages de la situation.
- Problème du « cycliste » (question de moyenne arithmétique) : La mise en commun des réponses est cruciale pour laisser apparaître diverses stratégies et résultats qui deviendront points de départ du débat scientifique. À l'opposé, une résolution trop guidée vers la mise en équation ne permet pas l'apparition de diverses réponses et peut empêcher le débat sur les solutions et l'argumentation mathématique.
- Problème de la « somme des 10 nombres consécutifs » : l'objectif visé ne se limite pas à l'élaboration d'une solution. Il s'agit de comprendre que plusieurs calculs ou expressions conduisent à la solution et que ces différentes résolutions permettent d'établir des égalités arithmétiques ou algébriques. Seule la mutualisation sous forme de traces écrites des diverses solutions et stratégies (ou plus tard dans la scolarité des diverses expressions algébriques) permet donc de répondre aux objectifs de l'activité.

La présentation des productions écrites proposées à la classe (affiches, formulations au tableau…) met en avant la diversité des idées, des stratégies, incluant des résultats erronés. C'est la condition sine qua non du débat scientifique dans la classe : la présence matérielle des énoncés produits par les élèves devant la classe permet de les débattre, de les valider rejeter, modifier etc. Les productions écrites ou orales des élèves et les éléments de leurs débats et argumentations sont aussi un support central pour concevoir l'institutionnalisation des connaissances mises en jeu.

Il est également fondamental de pouvoir consacrer du temps à ces activités et d'en proposer régulièrement dans l'année, en développant peu à peu les exigences et les compétences travaillées. Apprendre à travailler dans le cadre d'un nouveau contrat didactique lié à ces activités de résolution de problèmes nécessite une mise en place dans la durée et un travail régulier et progressif. L'énumération de nombreux savoir-faire techniques à maîtriser dans les programmes a tendance à restreindre le travail proposé par les enseignants à des séances d'exercices répétitifs et contribue à l'abandon d'activités de recherche et de résolution de problèmes en classe par manque de temps. *L'équilibre entre le travail sur les techniques et les* *automatismes d'une part et les activités de recherche et de raisonnement d'autre part nécessite d'être précisé dans les programmes.*

Recommandations

- *Souligner l'importance des modalités de mises en œuvre* des résolutions de problèmes dans la détermination des objectifs d'apprentissages.
- *Faire produire des écrits nombreux et de toute nature* (comprenant solutions incomplètes ou erronées, schémas, dessins, individuels, collectifs, etc.). Valoriser leur mise en commun pour permettre le débat et de travailler l'argumentation.
- *Insister sur l'importance d'institutionnaliser en prenant appui sur les phrases produites au cours de l'activité de résolution de problèmes*. Proposer des illustrations sur des exemples.
- *Préconiser une activité de résolution de problème régulière* en classe, en conseillant d'y consacrer des séances dédiées, avec une régularité et une progressivité cadrée par les programmes.
- *Prévoir l'évaluation des compétences visées par la résolution de problèmes au DNB*.

c. Inscrire les savoir-faire mathématiques dans le réel

Actuellement, de nombreux problèmes proposés aux élèves (dans les manuels notamment) sont présentés dans un « emballage de réalité » superficiel, avec une modélisation mathématique déjà prise en charge, ou décomposés en une succession de tâches élémentaires à réaliser masquant l'objectif global du problème. Tous ces facteurs conduisent à la perte du sens des savoir-faire mathématiques ainsi qu'à une faible autonomie des élèves pour prendre des initiatives et modéliser. Laisser la liberté aux élèves de s'emparer des problèmes de leur quotidien, de rechercher des stratégies de résolutions et des manières de modéliser semble une nécessité pour améliorer la compréhension de l'intérêt des savoir-faire mathématiques dans la réalité. Au delà, *ancrer les mathématiques dans la réalité est un moyen efficace pour engager les élèves dans une démarche de recherche et à prendre des initiatives pour trouver des modélisations adaptées au problème et permettant sa résolution.*

Points de vigilance

Pour donner du sens, il n'est ni nécessaire, ni suffisant que le problème soit concret, et il peut être aussi abstrait ou provenir d'une situation imaginaire.
La perte de sens de l'usage des mathématiques est favorisée par

- *Les problèmes artificiellement concrets* (par exemple des données numériques incohérentes, des situations de vie en décalage complet avec ce que vit l'élève ou non réalistes, des questionnements sans rapport avec un questionnement réel etc.).
- *Les problèmes proposant une modélisation toute prête* : la modélisation mathématique devient suffisante pour répondre à la question sans avoir compris le lien avec la situation, puisque ce n'est pas nécessaire.
- *Les problèmes décomposés* : les sous-étapes masquent l'objectif général qui fait perdre le sens de la démarche de résolution. Celle-ci se réduit à une succession de tâches élémentaires sans lien entre elles, et sans lien avec le problème initial qui devient purement « décoratif »

Recommandation

- *Proposer des problèmes cohérents dont les énoncés laissent l'élève libre de s'organiser pour le traiter.*
- *Développer progressivement chez les élèves les compétences permettant cette autonomie.*

4. Différents langages pour construire des preuves écrites

a. Verbaliser et formuler pour apprendre à raisonner

Dans la résolution de problèmes mais pas seulement, en particulier lors des mises en commun et de l'élaboration de traces écrites, il apparaît nécessaire de s'appuyer sur la verbalisation des élèves. Or il est souvent difficile pour les élèves de verbaliser en mathématiques, car cela demande d'oser s'exprimer devant les autres, se tromper, être inexact, toutes ces étapes étant nécessaires pour progresser. Tout ce qui peut être considéré comme des productions intermédiaires[10] des élèves nécessite donc d'y accorder une importance particulière dans la mise en œuvre des séances : l'acceptation de ces traces montre aux élèves leur capacité à produire des mathématiques ; c'est en appui sur ces productions intermédiaires que l'on pourra conduire les élèves vers des énoncés mathématiques. Tous les degrés possibles de précision et de proximité avec les standards et tous les types (sémiotiques) peuvent/doivent cohabiter.

Exemples de productions intermédiaires à prendre en compte :

- Le langage : de corporel à oral. Des gestes explicatifs, parfois même en appui sur des objets en lieu et place d'explications (par exemple des pliages ou des déplacements d'objets, des suivis de lignes avec les doigts), permettent de remplacer certaines difficultés d'expression (et pas seulement pour combler des handicaps visuels ou auditifs). Ces gestes donnent à voir le raisonnement et peuvent servir d'aide à la verbalisation.
- Le vocabulaire des productions orales : de relativement intuitif à mathématiquement précis et conventionnel. La découverte des mots du lexique mathématique (qui s'est d'ailleurs appuyé sur la langue usuelle) peut prendre quelques détours tout à fait profitables aux élèves.
- Les représentations graphiques : de figuratives à plus codifiées. Par exemple pour représenter des propriétés de géométrie dans l'espace ou des problèmes issus du réel ; le recours au figuratif n'est pas réservé à l'école élémentaire, et les élèves ont également des difficultés à utiliser des figures tracées à main levée dont la codification apparaît suffisante aux mathématiciens. La production de représentations issues des élèves ne doit pas laisser place prématurément à des représentations "à maîtriser", ni à une seule sorte de représentations, serait-elle considérée comme efficace. Expliciter plusieurs types de diagrammes peut aider les élèves y compris pour des problèmes additifs ou multiplicatifs.
- Les productions écrites : de narratives, en langue naturelle, à formalisées par des symboles mathématiques, en passant bien sûr par des étapes mixtes.

Les professeurs doivent être encouragés à considérer toutes ces productions intermédiaires[11]. C'est la discussion avec la classe lors des mises en communs qui conduit les élèves de leur propre production à la construction d'une trace écrite commune dont ils peuvent s'approprier la forme et le contenu. L'exigence prématurée d'un formalisme non maîtrisé par les élèves et d'un langage dont les règles ne leur sont pas connues ou reconnues constitue par ailleurs un facteur majeur du caractère élitiste des mathématiques et de sa perte de sens. La cohabitation des « textes situés » avec les traces plus formelles sont longtemps nécessaires à certains élèves. Elle aide à démystifier les mathématiques et à rendre la discipline plus accessible à tous les élèves en lui donnant du sens. Cela est donc propre à conserver ou amener un goût pour cette matière pour les élèves de genre ou d'origine très variés. *Les enseignants doivent donc avoir une*

[10] Qu'on appelle les "textes situés" de la "médiation sémiotique" lorsqu'il s'agit d'écrits.

[11] « L'enseignant repère certains signes produits par les élèves (ou il les introduit, le cas échéant) et guide leur évolution vers des textes mathématiques, c'est-à-dire vers des textes cohérents avec le savoir mathématique (l'enseignant est l'expert qui garantit ce lien)». (Maschietto-Bartolini-Bussi 2012)

attention particulière à ne pas conduire les élèves vers un formalisme excessif et prématuré, pour prouver comme pour énoncer.

Exemple

En algèbre, ne pas proposer aux élèves des calculs littéraux complexes (en 5ème) sans qu'ils aient pu se familiariser progressivement avec la signification potentielle d'une variable (voir les recherches sur le pré-algébrique des canadiens). Les situations de référence propres à conduire les élèves vers une compréhension du rôle des variables diffusent mais ne sont pas toujours bien mises en œuvre et pas souvent dans cette optique d'introduction des lettres en algèbre.

Points de vigilance

La compétence « communiquer » constitue un élément clé pour la construction du raisonnement.

- *La verbalisation est un objectif d'enseignement essentiel* pour comprendre et accéder au raisonnement.
- *Un formalisme excessif et prématuré nuit à la compréhension et favorise l'élitisme et la discrimination.*

Recommandations

- *Expliciter la variabilité des productions* que l'on peut attendre des élèves et qu'il convient d'accepter, lors de la mise en œuvre de situations de classe comme dans les évaluations.
- *Développer dans les programmes, dans les indications de mise en œuvre, la place à laisser aux productions intermédiaires* des élèves et leur rôle dans la trace écrite à élaborer avec eux à partir de ces productions.
- *Des indications sur les attendus de mise en œuvre de la part des enseignants* pourraient leur permettre d'affiner la précision de l'utilisation du langage.

b. Combiner les registres

L'apprentissage des mathématiques nécessite de s'appuyer sur des liens externes mais aussi sur de nombreux liens à l'intérieur des mathématiques, entre les différents domaines. Pour des soucis de clarté, ces différents domaines sont présentés dans les programmes de manière consécutive. Or une première lecture des programmes conduit souvent les enseignants à ne regarder que les tableaux détaillant les noms des notions et des énoncés à travailler, à l'intérieur de ces domaines et sous-domaines. *Ainsi, une présentation est à inventer pour faire apparaître clairement dans les tableaux des programmes les liens nécessaires entre les domaines* et qui sont sont trop souvent ignorés ou mésestimés par les enseignants. Travailler les changements de cadres, de registres (cf Duval) pendant les apprentissages est ce qui permet aux élèves de se former des images mentales, de relier les nouveaux apprentissages à ce qu'ils connaissaient déjà. Cela leur permet d'aller petit à petit vers l'abstraction et des notions plus conceptuelles. Un certain nombre de ces changements de domaines/cadres/registres devraient également être indiqués dans les programmes.

Exemples

- La notion de fonction s'appuie en 3ème sur l'algèbre (avec le calcul littéral et les équations) et les représentations géométriques, mais aussi sur les formules de mesures, et les notions de variable en algorithmique. On peut avoir dès la 5ème une introduction au calcul littéral basée sur l'aspect fonctionnel des expressions (nombreuses situations de référence maintenant connues), qui permettent ensuite de mieux revenir aux fonctions en fin de cycle (Artigue 2004).
- Les fonctions linéaires relient les droites, les équations linéaires, la proportionnalité, le théorème de Thalès, les homothéties. Un travail spiralaire de ces notions est nécessaire pour explorer efficacement

leurs liens les unes avec les autres. Il apparaît nécessaire de préciser dans les programmes pour les enseignants cette modalité de mise en œuvre spécifiquement pour certaines des notions.

- En seconde, les élèves seront amenés à distinguer la pente d'une droite en géométrie analytique, les coordonnées du vecteur directeur d'abscisse 1, le coefficient de linéarité d'une fonction linéaire, notions qui s'appuient sur celles évoquées précédemment, mais se situent dans des registres distincts.

Lors de ces apprentissages la précision dans l'utilisation du vocabulaire (de la part du professeur), est fondamentale pour que les élèves puissent mettre les notions en lien et construisent de nouvelles connaissances bien identifiées. C'est à cette condition que pourront se construire en seconde de nouvelles connaissances sur les bases de celles de cycle 4.

Recommandations

- *Faire apparaître les liens entre les registres des notions indispensables aux apprentissages* dans le texte et dans les tableaux des programmes (par exemple par des liens hypertextes).
- *Exposer les intérêts des progressions spiralaires* au sein d'une même année comme au sein d'un cycle dans les indications de mise en œuvre dans les programmes.

c. Calcul, raisonnement et automatismes

Les conclusions de la commission Kahane sur le calcul sont toujours d'actualité[12]. Le calcul, comprenant les automatismes et la mémorisation de faits numériques reste un facteur d'apprentissage des mathématiques et ne saurait être remplacé par les machines. Mais il ne faut pas non plus tomber dans un excès conduisant à ne faire du calcul que pour standardiser des méthodes, auxquelles d'ailleurs les élèves en difficulté se raccrochent trop souvent à défaut de chercher à les comprendre. Il faut encore et toujours mettre l'accent sur les rapports entre calcul et raisonnement, les rapports entre calcul exact et calcul approché (et ordres de grandeurs), qui sont développés dans le rapport.

Exemples :

- Les situations bien connues d'introduction au calcul numérique et à leur aspect fonctionnel : « les carrés bordés », etc (voir Artigue).
- « Le défi calcul » (IREM de Paris, Christine Chambris & Al., 2018) : situations de calcul réfléchi permettant de faire comprendre quand il y a besoin ou pas de la calculatrice, et de faire émerger du travail sur le calcul réfléchi, les règles algébriques du calcul (situation conçue pour le cycle 3, adaptée pour cycle 4).

Point de vigilance

Comme pour les activités basées sur les jeux, on estime trop souvent qu'au cours du travail sur les automatismes les apprentissages vont de soi, qu'il n'y a qu'à faire. Or ce que va retenir l'élève est qu'il a joué/récité, pas ce qu'il a découvert ou révisé comme propriétés, ou comment il a réfléchi et quelle stratégie il a utilisée. *Sans explicitation des objectifs ni verbalisation, les stratégies appliquées restent implicites* . Exprimer ces découvertes, ces essais, ces stratégies, permet de les conscientiser puis de les mémoriser. L'accent a été mis sur les jeux en classe et sur les automatismes dans les derniers programmes. Il convient maintenant de donner des garde-fous pour leur mises en œuvre.

Recommandations

- *Renforcer le travail liant calcul et raisonnement*, ainsi que calcul exact et calcul approché.
- *Préciser la manière d'utiliser ces liens pour conduire à des automatismes calculatoires*.

[12] Voir par exemple : Artigue, Repères-IREM. N° 54 - janvier 2004

5. Épreuves anticipées du baccalauréat en mathématiques

La réforme du lycée général de 2019 et les amendements sur les mathématiques qui ont suivi ont engendré une forte marginalisation des mathématiques.

- *Une clarification du statut de l'enseignement des mathématiques, et une meilleure équité des élèves envers la discipline, avec même volume horaire pour tous en première générale* parait indispensable à toute réflexion cohérente sur le sujet de la création d'un baccalauréat anticipé de mathématiques en filière générale.
- *En filière technologique la nécessité d'une telle création pose question*, compte-tenu du fait que les enseignements de mathématiques continuent pour tous les élèves de ces filières. Notons d'ailleurs qu'il n'y a pas d'uniformité d'épreuve pour le français entre ces deux filières.

Objectifs et contenus

Les objectifs à viser dans des épreuves anticipées de première concernent les mathématiques citoyennes :

- *Tout type d'analyse* (fonction, suites numériques et représentations, convergence, statistique, pourcentages et évolutions, modélisation, utilisation d'outils numériques de calcul, de modélisation ou de représentation) à partir de situations ancrées dans le réel (environnement, population, économie, santé, etc.)
- *Problèmes de mesures ou de constructions pratiques*, incluant changement d'unités, modélisation géométrique, description de protocole de construction ou de démarche de mesure. Utilisation de logiciel de construction géométrique.
- *Construction et restitution d'un raisonnement* fondé sur l'articulation logico-déductive, à partir de sources variées, sans exigence sur le formalisme du langage employé.

Modalités possibles

- Épreuve écrite commune à tous, avec éventuellement une épreuve spécifique complémentaire, selon le type de contenus de mathématiques suivis.
- Possibilité d'une épreuve orale comme en français, en travaillant davantage dans une perspective de situation de recherche et de la présentation d'une démarche fondée sur une argumentation logique mettant en évidence le raisonnement dans un contexte à définir (choisi par l'élève, en prise avec le réel ou non, forme de la trace écrite accompagnant le discours, etc).

Point de vigilance : la certification, facteur d'accroissement des inégalités sociales et de l'élitisme de la discipline.

Nous alertons sur le danger d'aller vers une certification qui aggraverait la marginalisation de la discipline parmi toutes les autres disciplines scolaires, externaliserait l'évaluation des compétences en mathématiques et déposséderait les enseignants de leur mission d'évaluation des savoirs et savoir-faire enseignés. Cela risquerait de créer une décharge de l'accès au savoir à l'extérieur de l'école pour préparer cette certification, qui augmenterait inévitablement la compétition vis-à vis des mathématiques et la ségrégation sociale. La forte expansion des cours particuliers en mathématiques et l'émergence de certifications privées pour l'accès aux CPGE suite à la réforme du baccalauréat en constituent des prémices préoccupantes.

Texte rédigé par Anne Cortella, Mélanie Guenais et Simon Modeste, bureau de la CFEM