Atelier
La notion de fonction d'une variable réelle,
une notion clé de la transition entre le secondaire et le supérieur.

# *PREMIÈRE PARTIE*
# ANALYSE DES SUJETS DE BAC S 2017 ET EXEMPLES DE SUJETS DE L1

**Denis GARDES, IREM de Dijon**

**Viviane DURAND-GUERRIER, U. Montpellier**

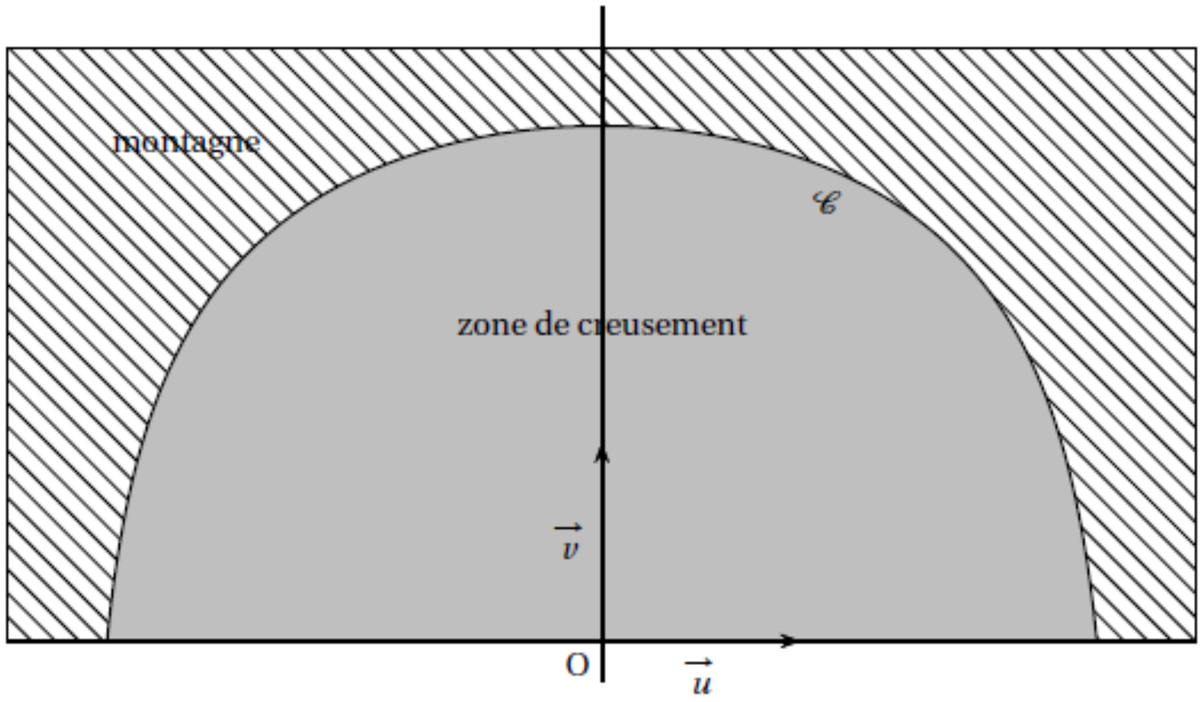
**Journée "L'enseignement des mathématiques, de l'informatique et de la physique dans la transition lycée-université : continuité ou rupture ?" organisée par la CFEM le 21 mars 2018 à l'IHP**

- 13 sujets différents

Dans chaque sujet, au-moins un exercice voire deux exercices font appel à la notion de fonction numérique de variable réelle (en général environ entre 5 et 6 points sur 20)

Forte contextualisation des études de fonctions dans les sujets (9 sur 13)

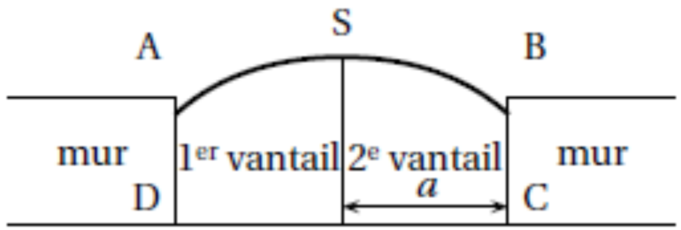
Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.




On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 2,5]$ par :

$$f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right).$$

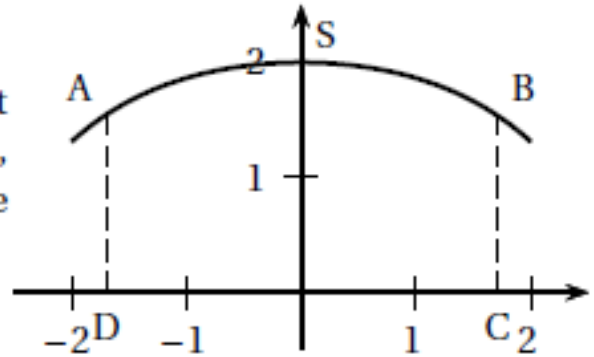
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.




Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction $f$ définie sur $[-2\,;\,2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\,;\,f(-a))$, $(a\,;\,f(a))$, $(a\,;\,0)$ et $(-a\,;\,0)$ et on note S le sommet de la courbe de $f$, comme illustré ci-contre.



Asie Juin 2017

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction $C$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t)=\frac{d}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

- $C$ désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- $t$ le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- $d$ le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- $a$ un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre $a$ est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction $C$.

**Partie A : étude d'un cas particulier**

La clairance $a$ d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit $d$ égal à 84.
Dans cette partie, la fonction $C$ est donc définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t)=12\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction $C$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

**Partie B : étude de fonctions**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

   Démontrer que, pour tout réel $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$, où $g$ est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction $g$ :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ ↘ | $-1$ |

   En déduire le sens de variation de la fonction $f$.
   *On ne demande pas les limites de la fonction $f$.*

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,80]$.
   En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

**Partie C : détermination d'un traitement adéquat**

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance $a$ de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit $d$ à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction $C$ est définie sur l' intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance $a$ d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
   **a.** Exprimer en fonction de $a$ la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
   **b.** Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
   Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
2. Déterminer la valeur du débit $d$ de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.*

**-Faible technicité calculatoire :**

(beaucoup de composées d'exponentielles de la forme exp(kx))

Tous les sujets demandent de calculer la dérivée et certains donnent le résultat (voire demande de l'admettre éventuellement )

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

2. On appelle $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Montrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[-2\,;\,2]$ :

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

## Variation des fonctions

Tous les sujets (sauf 1 qui l'admet) demandent de déterminer les variations de la fonction à partir de la dérivée

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel $x$ strictement positif.

**c.** Calculer $f(1)$ et $f\left(e^2\right)$.

On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{4}{e^2}$ | $\searrow$ | $0$ |

## Equation f(x)=a avec le TVI

6 sujets sur 13 demandent de montrer que l'équation f(x)=a admet une seule solution dans l'intervalle considéré

5 de ces sujets demandent une valeur approchée de la solution, un seul demande un encadrement

## Calcul de limites

7 sujets demandent de calculer une limite mais deux seulement sans qu'il y ait une interprétation dans le contexte

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction $C$.

**Partie A : étude d'un cas particulier**

La clairance $a$ d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit $d$ égal à 84.
Dans cette partie, la fonction $C$ est donc définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

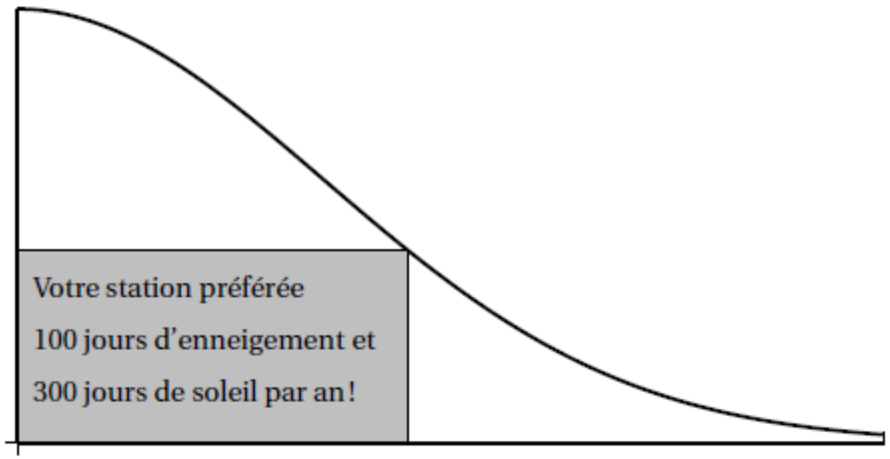
1. Étudier le sens de variation de la fonction $C$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

## Représentation graphique

Aucune représentation graphique demandée

Sa présence dans l'énoncé est souvent pour donner une aide à la compréhension du problème posé

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



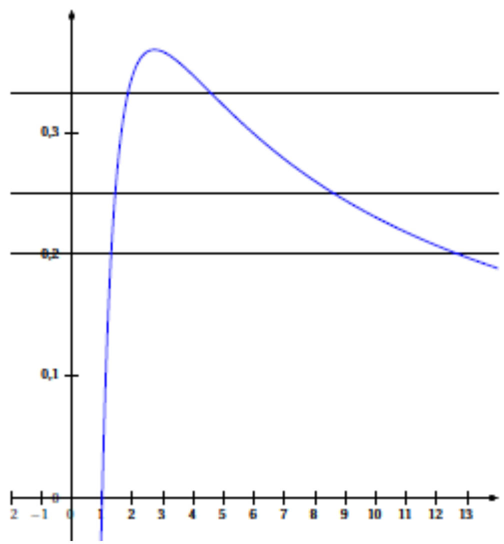
## Représentation graphique

Elle est donnée directement même si elle permet de changer de registre pour le problème posé (ce changement n'est pas à la charge de l'élève)

**1.** Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\,;\,e]$ notée $\alpha_n$.

**2.** D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel $\alpha_n$ est solution de l'équation $(E_n)$.

**a.** Sur le graphique sont tracées les droites $D_3$, $D_4$ et $D_5$ d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite $(a_n)$.



## Représentation graphique

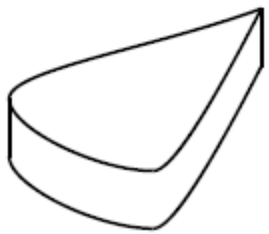
Seuls deux sujets font référence à la notion d'asymptote

Aucune question concernant la représentation graphique même si celle-ci est au-cœur du problème proposé

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

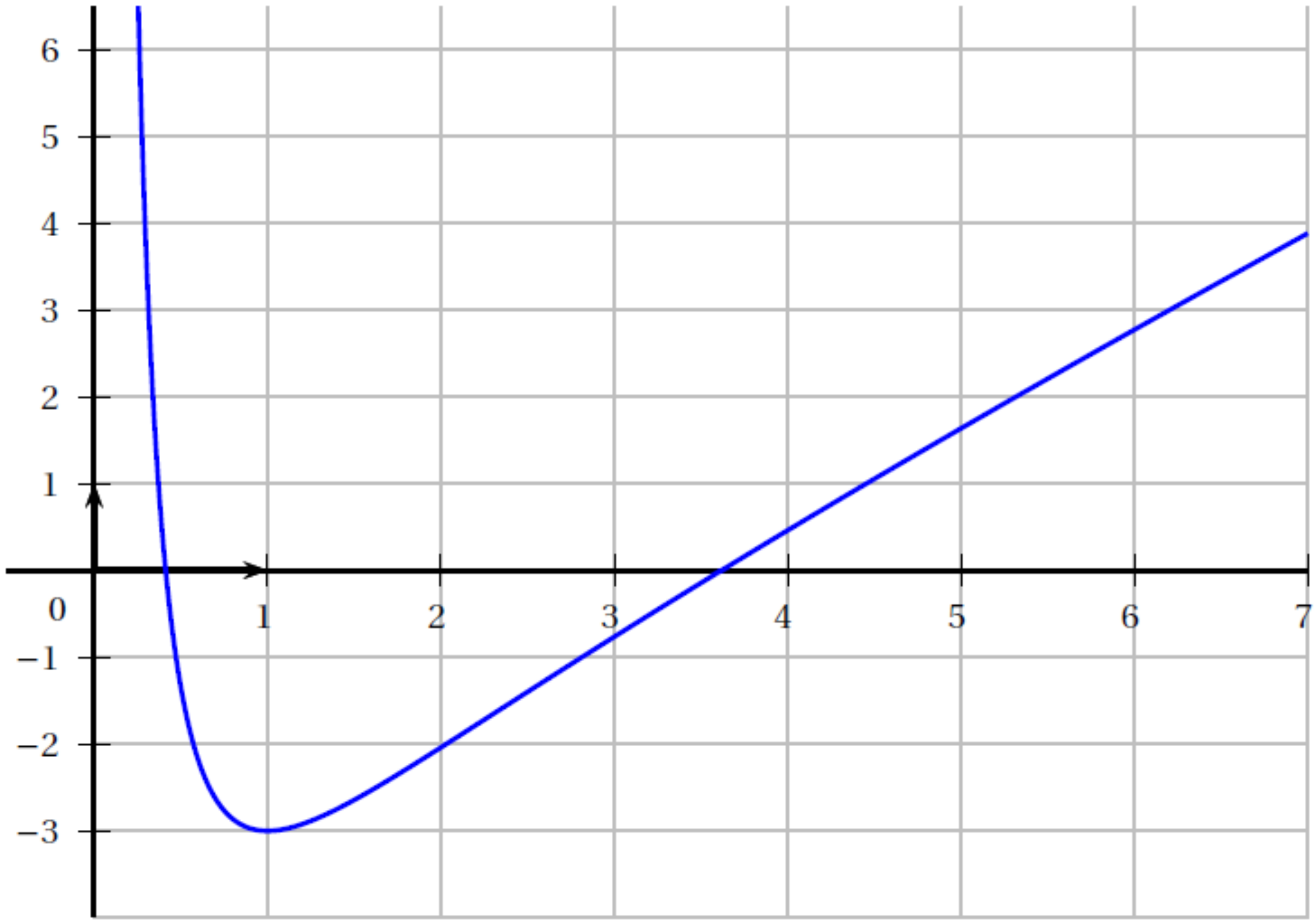


**Partie A : modélisation par une fonction**

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

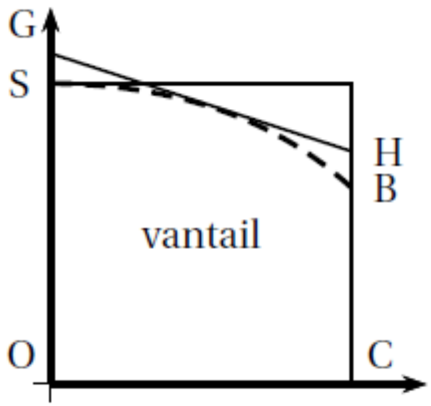
La représentation graphique de la fonction $f$ est donnée ci-dessous.

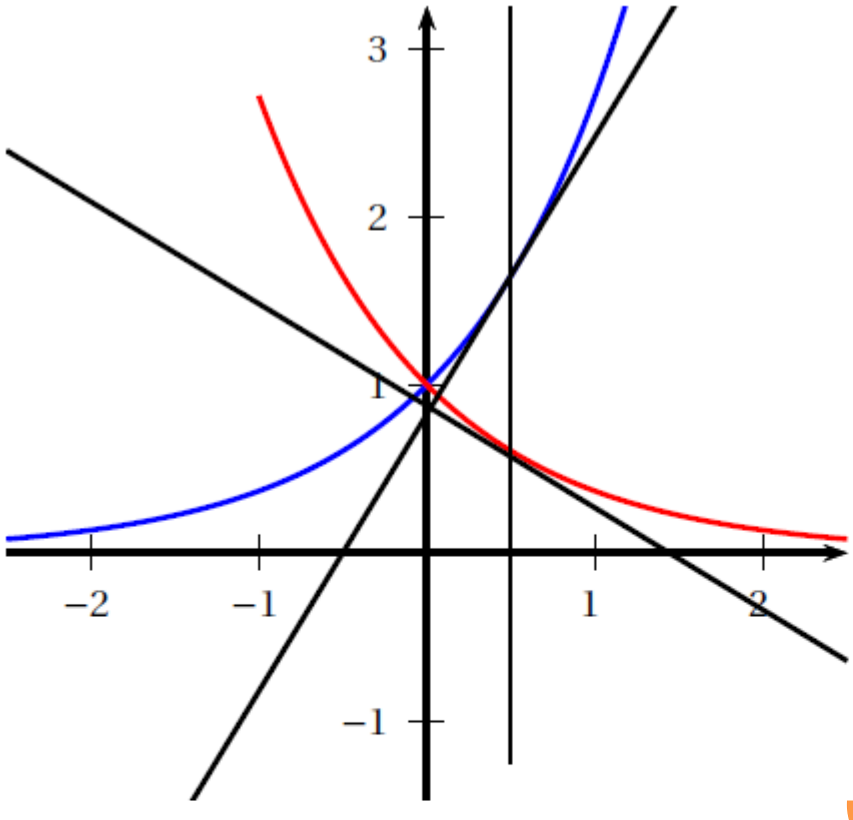



*Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.*

**Calcul de tangentes**

Seuls deux sujets demandent de déterminer une équation de tangente :



## Majoration, minoration

La démarche de majorer, de minorer ou d'encadrer une fonction pour en déduire une nouvelle propriété est quasi-absente dans tous les sujets.

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x)\, \mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

**1.** Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

**2.** Prouver que, pour tout entier naturel $n$ et pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[1\,;2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

**b.** Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $-x^2 \leqslant -2x+1$, puis : $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$.

## Calcul d'intégrale

Calcul d'intégrale très souvent lié à un calcul d'aire

Seuls trois sujets considèrent des intégrales comme des nombres à étudier

L'objet du problème est l'étude des intégrales $I$ et $J$ définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_n = \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à calculer $u_n$ en fonction de $n$.

**Primitives**

La recherche de primitive se fait dans presque tous les cas par lecture inverse du tableau des dérivées.

Seuls deux sujets mentionnent le mot «primitive » :
- Un demande de vérifier qu'une fonction est une primitive

Soit $F$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

## Primitives

- Un autre élabore un raisonnement pour déterminer une primitive

**3.** L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction $h$.

**a.** Vérifier que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$$

où $h'$ désigne la fonction dérivée de $h$.

**b.** Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

**c.** Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction $h$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Deux exemples de sujets en L1

2017-2018

*Module Analyse et Algèbre Linéaire 1*

Premier semestre,

Faculté des Sciences, U. Montpellier

Portail Curie

(*Informatique, Mathématiques, Mécanique, EEA, Physique -Physique Chimie, Chimie-Geosciences* )

***Entre continuité et rupture.***

Exercice 3. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \sqrt[3]{x^3+1}\; si\; x \geq -1\; et\; g(x) = arccox\left(\frac{1}{x}\right) - \pi\; si\; x < -1$$

(a) Montrer que $g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer les limites en $\pm\infty$ de $g$.

(c) Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

(d) La fonction $g$ est-elle dérivable en -1 ?

Exercice 4. Soit une fonction $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on suppose que $\lim_{x\to+\infty} h(x)e^{h(x)} = e$.
L'objectif de cet exercice est de montrer que $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ existe et vaut 1.

(a) Montrer qu'il existe un réel $A$ tel que $\forall x > A, h(x) > 0$.

(b) On définit une fonction k sur $[0, +\infty]$ par $k(x) = xe^x$ pour tout $x \in [0, +\infty]$.
Montrer que k est une bijection continue et de réciproque continue de $[0, +\infty]$ dans lui-même.

(c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ existe et vaut 1.

***DEUXIÈME PARTIE***

# POINTS DE VUE PONCTUEL, LOCAL ET GLOBAL EN ANALYSE

**Denis GARDES, IREM de Dijon**

**Viviane DURAND-GUERRIER, U. Montpellier**

**D'après CIIU (2017) *Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner.* IREM de Paris, Université Paris Diderot**

Les fonctions numériques sont de ***puissants outils de modélisation*** tant pour des problèmes intra mathématiques que des problèmes extra mathématiques. Ceci se rencontre très tôt dans le curriculum.

Au Lycée, elle est étudiée aussi comme ***un objet mathématique***, et on s'intéresse à diverses propriétés de cet objet.

Ceci est nécessaire pour pouvoir utiliser la puissance de la modélisation fonctionnelle pour des problèmes plus complexes.

Le travail sur et avec les fonctions fait intervenir plusieurs registres de représentation (Duval, 1993)

- ***représentations en tableau de valeurs*** (registre numérique)
- ***courbes*** (registre graphique)
- ***formules*** (registre algébrique)
- ***tableau de variations*** (registre schématique)
- ***représentations formelles*** (registre symbolique)

Chacun de ces registres est plus ou moins porteur de sens, d'informations ou de lacunes.

La capacité d'articuler les différents registres est un enjeu essentiel de l'apprentissage à la transition entre le secondaire et le supérieur.

***Dans l'étude des propriétés des fonctions, on distingue:***

***Propriété globales*** : monotonie, parité, périodicité, continuité et dérivabilité sur un intervalle etc..

***Propriétés locales*** : avoir une limite finie en $+ \infty$, en $-\infty$ ou en point donné ; tendre vers en $+ \infty$ ou $-\infty$ en $+ \infty$, en $-\infty$ ou en un point donné, être continue en un point donné, être dérivable en un point, admettre un développement limité en un point donné. Elles mettent en jeu la notion de *voisinages*.

On peut également considérer des relations locales : « être négligeable par rapport à » (relation binaire)

***Propriétés ponctuelles*** : qui ne dépendent que de la valeur au point considéré : valeur d'une fonction en un point, signe d'une fonction en un point.

***Une hypothèse des auteurs :***

L'appropriation de la notion de fonction nécessite des rencontres et des mises en fonctionnement des fonctions sous les trois aspects ***ponctuels, globaux, locaux*** afin de développer une capacité à considérer ces trois aspects et à pouvoir adopter un point de vue pertinent par rapport à une tâche visée.

***Une deuxième hypothèse*** est que ceci peut et doit être travaillé dès le lycée

Interactions entre les points de vue ***ponctuels, locaux et globaux*** et les différents registres de représentations.

- ***Représentations par une formule explicite*** (registre algébrique)
- ***courbes*** (registre graphique)
- ***formules*** (registre algébrique)
- ***tableau de variations*** (registre schématique)
- ***représentations formelles*** (registre symbolique)

## ***Représentations en tableau de valeurs***

(registre numérique)

Ceci fait travailler seulement ***le point de vue ponctuel***.

Certains élèves s'appuient sur les propriétés et relations ponctuelles pour inférer des propriétés globales.

Par exemple : de $f(3) > f(4)$, il vont déduire que $f$ est une fonction croissante.

## ***Représentations en tableau de variation***
## (registre schématique)

Ceci fait travailler ***le point de vue global.*** Il traduit des propriétés sur des intervalles : sens de variation, signe ; il porte aussi des informations sur ***des propriétés ponctuelles** :* valeurs en certains points et ***locales*** : limites

Coppé et al. ont montré que des élèves de seconde ont plus de difficultés à utiliser le registre schématique des tableaux de variations que le registre numérique des tableaux de valeurs.

Ceci pourrait paraître paradoxal pour ce qui concerne le passage au registre graphique : le tableau de variation fournissant une représentation très simplifiée de l'allure de la courbe.

# ***Représentations graphiques – Courbes***
# (registre graphique)

Les représentations graphiques permettent à la fois le travail ou l'adoption ***des perspectives ponctuelle*** et ***globale*** sur les fonctions : en effet le graphe d'une fonction peut être

- tracé point par point et l'adoption de la perspective ponctuelle sur le graphe permet de manipuler les propriétés ponctuelles classiques sur les images et les antécédents.
- être considéré globalement et il traduit alors pour les fonctions simples les propriétés globales : croissance, parité, périodicité, majoration . . ..

Elles permettent aussi de travailler ***le point de vue local*** par la présence des asymptotes ou des tangentes.

## ***Représentations par une formule explicite***
## (registre algébrique)

Le registre algébrique permet d'établir des ***propriétés globales*** à partir d'un ***travail ponctuel*** avec un élément générique.

Ceci parce que certaines propriétés globales sont obtenues par quantification universelle sur un intervalle de propriété (ou de relation) de type ponctuel sur un élément (ou un n-uplet) générique.

Néanmoins, les auteurs pointent que contrairement au registre graphique, le registre algébrique est moins bien adapté pour soutenir une perspective globale.

# ***Représentations par une formule explicite***
(registre algébrique)

Certaines propriétés comme la croissance ou la périodicité mettent en jeu deux variables.

Elles mettent en jeu des quantificateurs (2 universels pour la croissance – un existentiel suivi d'un universel pour la périodicité et font appel sous cette forme ***au registre formel***.

On peut faire l'hypothèse que l'étude de la monotonie sans utiliser le signe de la dérivée permet de mieux travailler le point de vue global.

CIIU (2017) Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner.

Commission Inter Irem Université

Merci de votre attention


Denis Gardes

denis.gardes@ac-dijon.fr

Viviane Durand-Guerrier

viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr