

Avis de la Commission française pour
l'enseignement des mathématiques
sur le
Projet de programmes de mathématiques pour le cycle 4

Stéphane Vinatier
Président de la CFEM

Cet avis émane de discussions au sein du Bureau de la CFEM.

Principes. Les intentions affichées sont bonnes et sont étayées par quelques pistes de mise en œuvre, en particulier pour les objectifs les moins évidents à atteindre comme les compétences psychosociales et l'égalité entre les élèves. Nous saluons cette orientation du projet de programmes.

Raisonnement. Nous apprécions que les compétences de raisonnement intègrent le contenu de certains chapitres, et soient ainsi susceptibles de devenir des objets d'enseignement. Nous nous réjouissons que la connaissance des différents types d'énoncés (définitions, propriétés, propriétés caractéristiques), des relations entre certaines propriétés (réciproque et contraposée, équivalence), des différentes formes de raisonnements (direct, par contraposée, par l'absurde, par contre-exemple) soient mises en avant dans le programme, et que leur apprentissage se fasse principalement « en acte », lorsque ces notions apparaissent à différents endroits du programme. Pour que ces bonnes intentions puissent être suivies d'effet, il nous paraît important de prendre en compte les remarques suivantes.

Le sens donné dans le programme au terme “propriété”, qui est polysémique en mathématiques, devrait être précisé (sans doute signifie-t-il la plupart du temps “énoncé qu'on sait démontrer”). D'autant que le programme évoque ensuite la contraposée et la réciproque d'une propriété¹, expressions qui pourraient prêter à confusion (quelles sont la contraposée et la réciproque de la propriété : $\cos(0)=1$?). Il serait sans doute préférable de parler d'« implication » à cet endroit, ou de « propriété qui énonce une implication », ou encore de « propriété qu'on peut mettre sous la forme “Si ..., alors ...” », c'est-à-dire d'énoncé conditionnel.

1. p. 6 : *L'élève comprend que si une propriété est vraie alors sa contraposée l'est aussi, sans pour autant que la réciproque soit vraie*

La complexité et la diversité des notions visées demandent, pour que leur acquisition par les élèves soit un objectif raisonnable, du temps pour les enseigner (le plus souvent « en acte », tout en travaillant d'autres points du programme) et une description précise des connaissances visées et des moyens de les atteindre. Or le projet de programme ne leur consacre que peu de place (et donc peu de temps à y consacrer pour les enseignants) et n'explicite ni ces connaissances ni les moyens de leur mise en œuvre. Comment par exemple présenter le sens du symbole d'équivalence ($\Leftrightarrow$) aux élèves ? L'utilisation du symbole lui-même pose d'ailleurs question à ce niveau, en particulier si son sens n'est pas travaillé spécifiquement ; l'utilisation d'une locution explicite comme « si et seulement si » paraît préférable (mais nécessite également un travail sur le sens pour qu'elle ne soit pas réduite à une sorte de formule magique).

L'idéal serait de faire prendre conscience aux élèves, préalablement au travail sur le raisonnement, qu'il existe des énoncés mathématiques qui sont vrais et d'autres qui sont faux, par exemple en les faisant travailler sur des problèmes suffisamment ouverts et accessibles pour qu'ils émettent des conjectures et réalisent que certaines peuvent être prouvées alors que d'autres s'avèrent fausses. Ce type d'activité permet aux élèves de comprendre la nécessité de prouver (ou de déclarer admises, lorsqu'elle la preuve n'est pas accessible) les propositions énoncées dans le cours. De comprendre donc l'essence même de la construction des mathématiques, et leur spécificité au sein des sciences et de la connaissance en général.

Certains types de raisonnements particulièrement génériques gagneraient à être mis en avant auprès des élèves, par exemple en promouvant une rédaction type (au moment de la mise au propre du raisonnement, pas pendant la phase de recherche). Sans que cette rédaction ait un caractère trop contraignant, on pourrait demander aux élèves de faire apparaître clairement, à chaque fois que ce type de raisonnement est mis en œuvre, l'implication « Si..., alors ... » et le fait que sa prémisse est vraie, pour déduire que la conclusion l'est également ; ou l'implication et le fait que sa conclusion est fausse, pour déduire que la prémisse l'est également. La partie décrivant la place du raisonnement se termine par la phrase « La structuration écrite de la démonstration est introduite dans un second temps, de manière progressive, avec des attendus formels adaptés au niveau des élèves. » (p. 6) mais on ne voit apparaître et préciser ces attendus nulle part, ce qui est regrettable.

Ces deux types de raisonnement, ainsi que l'utilisation de contre-exemples et le raisonnement par l'absurde, pourraient être introduits progressivement au cours du cycle, de façon à permettre aux élèves de bien assimiler les premiers avant d'enrichir leur palette de raisonnements en rencontrant les seconds.

Modélisation. De la même façon, la modélisation est un mot extrêmement polysémique dans l'enseignement, de sorte que son emploi dans le programme de mathématiques devrait être accompagné de plus de précisions que la courte description donnée dans la partie « La résolution de problèmes » (p. 5), ainsi que d'indications claires de mise en œuvre. Cette description semble indiquer qu'il

s'agit principalement de modélisation extra-mathématique, c'est à dire mettre en œuvre un traitement mathématique d'une situation issue du monde réel (« traduire une situation en langage mathématique »), déduire des résultats mathématiques (« choisir des outils adaptés »), à confronter aux observations sur les objets du monde réel qui leur correspondent (« valider ou invalider un modèle »). Cette version minimale du cycle de modélisation de Blum et Leiß² permet de donner un cadre à une réflexion sur la conception du modèle et l'interprétation de ses résultats. Pourtant, quand la modélisation est évoquée dans les contenus du programme, cette réflexion disparaît (« sachant qu'un mobile se déplace à 5 m/s, l'élève modélise la situation par $d(x) = 5x$ où x est le temps exprimé en secondes et $d(x)$ la distance parcourue, en mètres, en x secondes. », p. 59), la modélisation est réduite à une simple représentation (« On modélise cette activité par le graphique suivant avec en abscisse le temps en minutes et en ordonnée la distance qui sépare Clotilde de chez elle », p. 53) ou devient intra-mathématique (« Modéliser une situation de proportionnalité par une fonction linéaire et savoir qu'une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité », p. 59³).

On constate que le projet de programme utilise le mot “modélisation” dans des sens très différents et que les contenus ne s'intéressent guère à la réflexion sur les liens entre une situation réelle et le monde mathématique, contrairement à ce que semble annoncer le préambule. Il serait bienvenu que le programme soit clarifié quant à ce qu'il entend par “modélisation” et sur ce qu'il attend des enseignants à ce sujet, qu'il fixe des objectifs précis et propose des moyens de les atteindre. À défaut, il est malheureusement probable que le flou entourant cette notion conduirait à ce qu'aucune activité de modélisation extra-mathématique ne soit mise en œuvre en classe de mathématiques, hormis peut-être par le petit nombre d'enseignants ayant déjà reçu une formation spécifique à ce sujet. Il s'agit pourtant d'un enjeu majeur dans la construction de l'esprit critique des élèves et de leur compréhension du monde que de les initier aux manières pertinentes d'établir des liens entre les mathématiques et le monde réel.

Le calcul littéral. La continuité des apprentissages semble avoir fait l'objet d'une certaine attention, en particulier dans la définition des automatismes qui, à chaque niveau, reprennent une partie des connaissances ou compétences acquises précédemment. Sur certains thèmes, nous constatons cependant une rupture des enseignements proposés par rapport aux acquis du cycle 3, en particulier pour ce qui concerne le calcul littéral. Celui-ci est introduit au cycle 3 par le biais de modèles pré-algébriques (suites de motifs évolutifs, égalités à trous, programmes de calcul ...), qui ne sont que très peu repris dans le projet de programme du

2. Werner Blum et Dominik Leiss. “Filling up - The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks”. In : *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (2005)*. Sous la dir. de Marianna Bosch. Europeans research in mathematics education 4. United Kingdom : CERME, 2006, p. 1623-1633.

3. La modélisation extra-mathématique intervient en amont dans ce cas, au moment de choisir d'utiliser un modèle proportionnel pour traduire la situation réelle.

cycle 4, sinon dans les automatismes de la classe de 5^e. Il est pourtant écrit dans le programme de cycle 3 que « Ce passage à l'abstraction (...) n'est pas un objectif prioritaire en 6^e », ce qui indique clairement qu'on ne peut le supposer acquis par les élèves à leur arrivée au cycle 4.

Par ailleurs, il semble difficile de donner à l'élève le sens du travail de résolution des équations proposées en classe de 5^e (du type $ax = b$ et $x + b = c$), du fait qu'il a déjà les compétences nécessaires pour trouver dans chaque cas la valeur de x : il sait que b/a est le nombre qui multiplié par a donne b , il s'agit donc de lui faire comprendre qu'on peut interpréter cette solution en terme de résolution d'équations. Cependant, cela demande d'avoir explicité au préalable l'équation en tant que nouvel "objet mathématique", avec lequel on apprend à travailler. Il y a nous semble-t-il un travail sur la "mise en équation" à ajouter dans le programme, avant de penser à les résoudre, qui pourrait prendre appui sur les modèles pré-algébriques du cycle 3.

Quotients. Il pourrait être utile de faire remarquer aux élèves que le mot « quotient » est utilisé dans des sens différents selon le contexte : il l'est la plupart du temps dans le sens de "résultat de la division d'un nombre par un autre" (parfois remplacé par le mot "rapport" dans la partie "proportionnalité"), sauf lorsqu'il est question de division euclidienne où le quotient n'est plus égal au résultat de la division des deux nombres si le reste est non nul.

Statistiques. Le projet paraît globalement convenable. Il pourrait être utile de mentionner explicitement la nature des variables statistiques étudiées (qualitative ou quantitative, discrète ou continue). La définition de médiane d'une série (« toute valeur qui partage la série ordonnée en deux sous-séries de même effectif ») pourrait être en conflit avec un usage répandu consistant, dans le cas des séries d'effectif pair, à prendre la moyenne des deux valeurs centrales. Il faudrait peut-être expliciter que, dans ce cas, "la" médiane n'est pas unique, afin que la notion visée entre réellement dans les pratiques. Il serait bon également de préciser la définition adoptée pour les quartiles Q_1 et Q_3 . Enfin, les liens entre moyenne et médiane et représentations graphiques pourraient être explorés, en complément de leur définition portant sur les données (brutes ou sous forme de tableau).

Probabilités. Elles sont le domaine où les liens entre mathématiques et monde réel sont les plus nombreux et les plus utilisés pour l'apprentissage des fondements de la théorie. Les faiblesses du projet de programme quant à la définition de la modélisation mathématique y sont donc particulièrement visibles. S'il est tout à fait juste d'écrire que « L'équiprobabilité est une hypothèse qui ne se démontre pas » (p. 42), il est étrange de la justifier « par un argument de symétrie », c'est-à-dire à travers une interprétation de la situation réelle dans un autre modèle mathématique (la symétrie étant bien une notion mathématique). Attention à l'utilisation de l'expression « hypothèse qui ne se démontre pas » :

en mathématiques, on peut éventuellement “démontrer qu’une hypothèse est satisfaite dans certains cas”, une hypothèse ne se “démontre” pas.

En classe de 5^e, les automatismes de la sous-partie “probabilités” font fi de la distinction entre modèle et réalité, ils prennent pour une vérité mathématique la traduction dans le monde réel des résultats de différents modèles mathématiques ; de même ils semblent induire l’idée qu’une probabilité $1/4$ est une traduction exacte de la locution “1 chance sur 4”, omettant là encore la distinction nécessaire entre monde réel et modèle mathématique. Il serait bienvenu de préciser ici que les probabilités “automatisées” sont celles obtenues “dans les modèles probabilistes couramment utilisés pour décrire ces situations”, ou une autre formulation équivalente. De plus, prétendre que « L’élève choisit de décrire une situation par une équiprobabilité des issues » (p. 45) semble excessif dans la mesure où il n’a guère d’autre choix... tout au plus devrait-on lui demander de savoir justifier cette hypothèse. Ici encore, la modélisation est en trompe-l’œil, le choix de la probabilité uniforme étant le seul possible à ce niveau.

En classe de 4^e, l’idée de « faire percevoir l’aspect fréquentiel de la probabilité (version vulgarisée de la loi des grands nombres) » est un bel objectif, il serait intéressant de détailler les moyens pour y parvenir.

En classe de 3^e, la sous-partie “probabilités” est très réduite, ce qui interroge là encore sur la continuité des apprentissages. On ne comprend pas bien en quoi la fameuse expression “nombre de cas favorables sur nombre total de cas” illustre la formule de la probabilité d’une union. De plus, celle-ci est sans doute déjà connue “en acte” depuis longtemps par les élèves. La formulation « événements faisant intervenir “ou”, “et” “ou exclusif” » (p. 50, il manque une virgule dans l’énumération) peut être source de confusion car elle met sur le même plan deux opérations sur des événements et l’union disjointe, qui suppose une condition qui n’est pas toujours satisfaite. Enfin la notion d’épreuves indépendantes reçoit-elle une définition ou repose-t-elle uniquement sur l’intuition ? Ce qui n’avancerait guère par rapport aux acquis du cycle 3.

Fonctions. Il semble que les fonctions ne soient introduites que pour décrire des relations entre des grandeurs, et pas du tout en tant qu’objet mathématique. Il est dommage de ne pas aller jusqu’à une explication simple de ce qu’est cet objet, par exemple “relation entre deux ensembles qui associe à chaque élément de l’ensemble de départ un unique élément de l’ensemble d’arrivée”, d’autant que le langage des ensembles est apparu dans d’autres chapitres (ensembles des nombres entiers, décimaux, rationnels ; intervalles ; univers en probabilités ou ensembles de solutions d’une équation).

En classe de 5^e, il n’est pas évident de mesurer la portée de l’utilisation de l’expression “en fonction de”, dans l’esprit du programme ; nous doutons en tout cas que cela suffise à donner aux élèves le sens de la notion de fonction. Les objectifs de la première case du tableau “fonctions” (p. 53) semblent pour certains redondants avec ceux de la deuxième case (p. 54), par exemple « Produire un tableau de valeurs. Lire et interpréter un tableau de valeurs » et « Traduire la relation de dépendance entre deux grandeurs par un tableau de valeurs à partir

d'une formule ». Les différences que le programme envisage entre ces objectifs devraient être soulignées.

En classe de 4^e, le programme pourrait expliciter l'idée de comparer deux nombres ou deux grandeurs à l'aide de leur rapport, en comparant celui-ci avec 1 (et en prenant garde aux signes des nombres).

En classe de 3^e, la description des automatismes à l'aide d'exemples (p. 58) peut laisser penser qu'il faut apprendre leurs solutions par coeur, est-ce le cas ? Concernant les antécédents (p. 59), il pourrait être utile de proposer en illustration des fonctions non injectives, par exemple la fonction carré. Celle-ci apparaît justement quelques cases plus loin (p. 60) pour la résolution de $x^2 = a$, il serait opportun de faire le lien avec la notion d'antécédent ! En précisant peut-être l'ensemble de départ (dont on suppose que c'est l'ensemble des réels tout entier).

Conclusion. Devant ce projet de programme très large, enrichi de certaines notions auparavant étudiées seulement au lycée, et même si certaines notions jusqu'ici introduites au cycle 4 ont été avancées au cycle précédent, il est à craindre que le temps manque pour faire découvrir aux élèves toutes les notions au programme, les laisser se familiariser avec elles, les mettre en pratique dans diverses situations et leur donner un sens raisonnablement juste.

Bien sûr le choix des notions à présenter est très difficile, nous regrettons d'ailleurs la quasi-disparition des nombres premiers par rapport aux programmes actuels. Faire ce choix de manière très rigoureuse paraît pourtant indispensable pour éviter que certaines notions importantes, inscrites comme des objectifs, ne soient traitées qu'à la marge, voire pas du tout, et que les lacunes des élèves ne handicapent la poursuite de leurs études mathématiques et scientifiques. Nous pensons en particulier à l'acquisition de compétences sur le raisonnement, évoquées de façon trop marginale dans ce projet, et de modélisation, presque absentes.

Enfin, nous insistons à nouveau sur l'impérieuse nécessité de développer et renforcer la formation initiale et continue des enseignants pour mettre en œuvre les programmes de manière appropriée, que ce soit sur l'enseignement du raisonnement, de la modélisation mathématique ou de très nombreux autres thèmes du programme, pour approfondir la réflexion sur les enjeux et les obstacles didactiques qui leur sont associés, ou encore sur les méthodes pédagogiques innovantes appropriées à chaque situation.