

Rupture et continuité à la transition lycée - université

Gwenola Madec

Université Paris 13 – IREM Paris-Nord – CII université

Groupe de travail : Viviane DURAND-GUERRIER,
Denis GARDES, Patrick BOISSÉ, Fabrice VANDEBROUCK

Des ruptures de fait.

Rupture technologique. Faible usage de l'ordinateur et de la calculatrice graphique.

Rupture dans les exigences “rédactionnelles”.

Rupture dans l'évaluation des productions.

Contrat implicite au lycée : « j'ai compris, je sais faire des choses, je trouve une solution »
(et le professeur cherche des points)

Nouveau contrat : « j'écris pour convaincre et prouver que ce que j'avance est vrai,
que ma solution est correcte ».

L'objectif n'est pas « trouver » mais « prouver ».

Des ruptures nécessaires.

Travailler sur des objets génériques et non plus explicites.

Fonctions, suites génériques, ...

Ce qui induit des activités graphiques de nature différente et des rôles différents pour ces activités.

Écrire en langage mathématique ce qui n'était perçu que graphiquement.

Utiliser des définitions-outils.

Les définitions ont un rôle clé dans l'activité du supérieur.

« Une **définition** est une « introduction précise » d'un concept qui n'est pas auto-référencée [...] et qui n'est pas contradictoire avec d'autres concepts. »

« Tout ce que l'on peut et va prouver découle de l'usage de définitions préalablement introduites. C'est une bonne compréhension et maîtrise des définitions qui permettent d'aborder les différentes activités proposées. »*

* « Bilan de praticiens sur la transition lycée – université. Exemple de l'algèbre linéaire. » 1.3.
David Théret et al., IREM de Montpellier, Repères IREM n°85. Octobre 2011.

Les définitions ont un rôle clé dans l'activité du supérieur.

En Algèbre comme en Analyse, la définition sera le premier outil pour entrer dans la résolution d'une question ou la constitution d'un nouveau savoir.

Définition (Fonction Arc cosinus). On définit la *fonction Arc cosinus*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Arccos} : [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto \text{Arccos } x . \end{array} \right.$$

comme la fonction réciproque de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] & \rightarrow [-1, 1] \\ x & \mapsto \cos x . \end{array} \right.$$

Elle est donc caractérisée par

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow (x = \cos y \text{ et } y \in [0, \pi])} .$$

La tentation du supérieur :

« Ce n'est pas grave s'ils ne savent rien, on va tout redéfinir ».

*“Sur des définitions maîtrisées vont se construire
toutes les connaissances dont on a besoin.”*

Une rupture problématique.

Première difficulté : les définitions.

Les définitions du secondaire sont introduites, illustrées et assimilées au cours d'activités et d'exercices.

- L'élève n'a pas la charge de s'approprier la définition.
- L'assimilation des contenus est progressive.

Conséquence : Il ne sait pas quoi faire quand il ne comprend pas immédiatement.
Il ne sait pas réfléchir par lui-même à un objet nouveau.

Première difficulté : les définitions.

Les définitions du secondaire sont introduites, illustrées et assimilées au cours d'activités et d'exercices.

Remarque

Il n'y a généralement pas de différence entre les activités introductives à une définition-outil et à une définition qui ne l'est pas.*

Cf. les activités introduisant la définition de la croissance pour une fonction en Seconde, et celles qui introduisent une définition intuitive comme la dérivée en Première.

Première difficulté : les définitions.

Quand l'élève dispose d'une « définition en acte »

(il est capable de repérer des objets qui satisfont ou pas à cette définition)

il ne cherche pas à mémoriser la définition pour la rendre disponible chaque fois qu'un l'objet satisfait à cette définition.

« Je ne vais pas apprendre la définition alors que je sais ce que c'est. »

L'élève peut faire face à des objets explicites mais pas "génériques".

La connaissance de la définition des objets ne semble pas toujours un attendu du lycée.

On trouve très peu de travail explicite sur des objets qui vérifient ou ne vérifient pas une définition.

C'est peut-être la définition de la croissance d'une fonction qui est le plus mobilisée.

Première difficulté : les définitions.

Devenu étudiant, l'ancien lycéen est donc très démuni devant l'injonction :

“ Apprenez vos définitions ! ”

Deuxième difficulté : les compétences logiques.

Les compétences logiques des étudiants ne leur permettent pas d'assimiler et d'utiliser certaines définitions.

Le statut des variables et la quantification.

Les énoncés de Seconde et de Première apparaissent non quantifiés.

Les énoncés de Terminale semblent majoritairement quantifiés.
mais le statut des variables ne semble pas travaillé.

Exemple 1. Pour n entier, $n \geq 0$, la propriété $B(n)$ suivante :

Pour tout nombre réel $x > 0$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Raisonnement sur $B(n)$ donne à n un statut de paramètre et à x un statut de variable muette.

Montrer que pour tout entier n , la propriété $B(n)$ est vraie donne à n un statut de variable muette.

Deuxième difficulté : les compétences logiques.

Exemple 2. *Définition mettant en jeu des implications comme dans “famille libre”.*

Une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Exercice V.8. Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre si et seulement si la famille $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$ est libre.
- Que se passe-t-il si l'on remplace la famille $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$ par la famille $(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w})$ dans l'assertion précédente ?

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

En réalité, on s'appuie sur des connaissances et des représentations que l'on pense disponibles.

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

A commencer par les différentes façons d'écrire un ensemble
(ensemble de nombres ; graphe ; ensemble de solutions de ... ; ...)

Définition (Graphe d'une application). La donnée de l'association $f : X \rightarrow Y$ définissant une application est équivalente à un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y := \{(x, y); x \in X \text{ et } y \in Y\}$ des ensembles de départ et d'arrivée de la forme suivante

$$G_f := \{(x, y); x \in X, y = f(x)\} = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times Y .$$

Polycopié "Mathématique pour les sciences", Semestre 1.
Chapitre 2. Généralités sur les fonctions numériques. P13

EXERCICE. Déterminer l'image par l'application f de la courbe Γ suivante :

$$\Gamma = \{M(x, y) \in P, \quad |x| \leq 1 \text{ et } y = \sqrt{x+1}\}.$$

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

L'ensemble des nombres réels.

Introduit en Seconde, il n'est pas vraiment défini.

- « l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons s'appelle l'ensemble des nombres réels »

Premier chapitre du livre MATH2^{de} Nathan.

1

Ensemble $\mathbb{R}$ et intervalles

Note

L'ensemble des nombres **entiers naturels** (positifs) est noté $\mathbb{N}$.

L'ensemble des nombres **entiers relatifs** (positifs ou négatifs) est noté $\mathbb{Z}$.

Note

$]a; b[$: en b , le crochet est **ouvert** c'est-à-dire dirigé vers l'extérieur. Cela signifie que b **n'est pas** dans l'intervalle.

L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des **nombres réels**. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous ces nombres.

Certaines parties de $\mathbb{R}$ sont appelées des **intervalles**; on les note en utilisant des crochets.

Ensemble des réels x tels que :	Représentation	Intervalle
$x < b$		$] -\infty ; b[$
$x \geq a$		$[a ; +\infty[$
$a \leq x \leq b$		$[a ; b]$
$a < x < b$		$]a ; b[$
$a \leq x < b$		$[a ; b[$

On définit de la même façon les intervalles $]a; b]$, $]a; +\infty[$ et $] -\infty ; b]$.

Attention ! $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels; du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert. Par exemple, on note : $\mathbb{R} =] -\infty ; +\infty[$.

Pas d'activité ou d'exercice sur cet ensemble.

Premier paragraphe du premier chapitre sur les fonctions HYPERBOLE 2^{de}.

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

L'ensemble des nombres réels.

Définitions que l'on retrouve dans les parties formulaires d'ouvrages de Terminale :

« $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels : ce sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée. »

MATH'X TS – Didier .

« $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire des nombres rationnels et des nombres irrationnels. »
(*et les irrationnels ont été définis comme les nombres qui ne sont pas rationnels ...*)²

Hyperbole 1^{re} et TS – Nathan

on peut supposer qu'aucun travail n'est prévu sur le sujet.

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

L'ensemble des nombres réels.

Les compétences algébriques sont faibles : hors calculatrice, point de salut !

Les calculs se font avec des décimaux.

Les différentes écritures équivalentes des nombres réels ne sont pas maîtrisées

La densité de certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$ n'est pas perçue.

La notion d'intervalle n'est pas suffisamment maîtrisée et ses différentes écritures ne sont en

général pas disponibles en L1 : $x \in [a, b]$; $a \leq x \leq b$ et $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$.

Ce qui peut paraître surprenant compte tenu de la place des intervalles dans le cours de probabilités de Terminale.

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

L'exemple des vecteurs.

Attendu dans le supérieur : une perception “en acte” du vecteur et ses représentants permettant de donner du sens à différents aspects de l’algèbre linéaire.

Introduit dans le plan en Seconde à partir des translations.

Égalité de deux vecteurs définie par une relation liant leurs représentants (parallélogramme)

Cette relation permet de définir les opérations sur les vecteurs.

Notions étendu à l’espace en Terminale.

Programme de Seconde	Vecteurs Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé à la translation qui transforme A en B. Égalité de deux vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. • Savoir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.	La notion de vecteur permet de représenter une translation par les coordonnées du vecteur associé dans un repère.
-------------------------	--	---

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

L'exemple des vecteurs.

En pratique, les vecteurs sont disponibles comme “segments orientés”.

Pour une très grande majorité d'étudiants de licence, une égalité de vecteurs ne veut pas dire qu'il s'agit d'un même vecteur mais de deux vecteurs qui ont les mêmes propriétés.

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

L'exemple des vecteurs.

En pratique, les vecteurs sont disponibles comme “segments orientés”.

Renforcé par :

Les définitions données
dans certains ouvrages

DÉFINITIONS

- On associe à cette translation un segment orienté $[AB]$ appelé **vecteur**. On le note $\overrightarrow{AB}$.
- La translation qui transforme A en B est également appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** .



MATH2^{de} Nathan.

Le vocabulaire employé (*longueur” du vecteur ; des représentants égaux*)

Autres difficultés du « On va tout redéfinir ... »

L'exemple des vecteurs.

En pratique, les vecteurs sont disponibles comme “segments orientés”.

Renforcé par :

Les types d'exercices (faible nombre de représentants en jeu, toutes les extrémités nommées ; peu de décomposition en somme de vecteurs).

Un certain flou autour des repères.

La plus faible mathématisation de la physique du lycée.

Ils sont insuffisamment travaillés pour éclairer les activités du cours d'algèbre.

Des rendez-vous manqués ...

Autour de la mise en place des **vecteurs**.

Dans l'utilisation du **sens de variation**.

Sur les inclusions des **ensembles** de **nombres** et l'enrichissement de l'ensemble des réels.

Dans chacun de ces cas, il est possible de travailler à l'aide d'une définition-outil et de divers types de raisonnements.

Des rendez-vous manqués ...

Ce qui devrait être dans la continuité entre les pratiques du secondaire et les pratiques du supérieur :

La distinction entre le **processus de résolution** et l'**interprétation possible du résultat** qui, elle, va dépendre du contexte dans lequel le problème se trouve posé.

Cf. méthode autour de la proportionnalité dès le collège, de la résolution de système en lycée et à l'université.

Un support naturel à une continuité : **les suites**

Richesses d'un objet présent depuis le primaire, aux aspects multiples et mobilisés dans différents contextes (dénombrements, tableurs).

Elles sont définies en classe de Première comme une fonction sur $\mathbb{N}$.

Elles apparaissent comme définies explicitement ou générées par un algorithme.

Dès la Première **un travail plus formel** est fait sur les suites

Étude de la croissance à partir de la définition.

Etude de la divergence vers l'infini à partir de la définition.

Un support naturel à une continuité : les suites

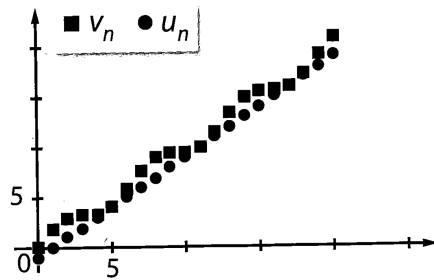
Le travail poursuivi en Terminale avec des démonstrations d'un **formalisme proche de celui du supérieur**.

(comparaison de limites quand $u_n \leq v_n$, Limite d'une suite croissante non majorée,, ...)

Limites et comparaison

Théorème Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$



La suite (u_n) représentée en bleu qui tend vers $+\infty$ « oblige » la suite (v_n) représentée en rouge à tendre vers $+\infty$.

Démonstration au programme (exigible)

Soit $I =]A; +\infty[$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_n \in I$.

De plus, il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, $u_n \leq v_n$.

Soit N un entier supérieur ou égal à n_1 et n_2 . Alors, pour tout $n \geq N$, $u_n > A$ et $u_n \leq v_n$.

D'où pour tout $n \geq N$: $v_n > A$, c'est-à-dire $v_n \in I$. Donc par définition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Schéma qui éclaire la preuve

Un support naturel à une continuité : les suites

Ce n'est pas toujours le cas pour le résultat équivalent sur les fonctions :
le graphique peut faire office de justification.**
Les démonstrations porte sur des fonctions explicites.

**MATH'X chapitre 6.

► Théorèmes de comparaison (admis)

Ces théorèmes sont énoncés avec les limites quand x tend vers $+\infty$, on pourrait également les énoncer :
– quand x tend vers $-\infty$ (on remplacera $[\alpha ; +\infty[$ par $]-\infty ; \beta]$) ;
– quand x tend vers un réel a (on remplacera $[\alpha ; +\infty[$ par un intervalle $[a - r ; a[$ ou $]a ; a + r]$,
 r étant un réel positif non nul).

Théorèmes

(1) Si pour tout réel x appartenant à un intervalle $[\alpha ; +\infty[$,
 f et g sont définies et
si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,
alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

(2) Si pour tout réel x appartenant à un intervalle $[\alpha ; +\infty[$,
 f et g sont définies et
si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$,
alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

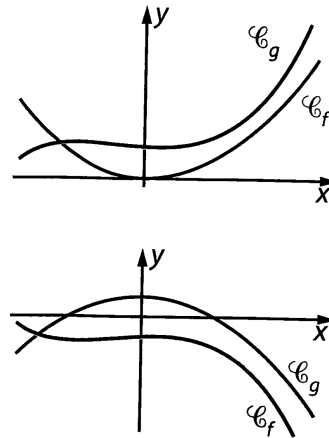


Schéma qui "justifie".

Suivi de différents exemples de calcul de limites
sur des fonctions explicites de natures différentes
(rationnelle, trigonométrique, composée, ...)

Un support naturel à une continuité : **les suites**

Des démonstrations d'un **formalisme proche de celui du supérieur**.

Différents types de démarches et raisonnements sont présents lors du travail sur les limites de suites (implication ; contraposée ; absurde et négation)

Un support naturel à une continuité : **les suites**

Le travail poursuivi en Terminale avec des démonstrations d'un **formalisme proche de celui du supérieur**.

Différents types de démarches et raisonnements sont présents lors du travail sur les limites de suites (implication ; contraposée ; absurde et négation)

Les suites sont un support naturel pour travailler le **raisonnement par récurrence** en Terminale.

Conséquence.

Les suites forment un support riche et exploitable
dans la transition lycée-université.

Et pourtant ce n'est majoritairement pas le cas :
l'étude des fonctions est la plupart du temps privilégiée pour entrer
dans le formalisme de l'analyse de la première année du supérieur.

Cf. la plupart des ouvrages de MPSI, CPSI ou L1 (contre-exemple, L1 Marco – Lazzarini).

Conclusion : Il y a ruptures dans la transition.

Toutes les **ruptures** ne sont pas nécessaires ou souhaitables.

Des **ruptures** qui peuvent **être atténuées** :

- En prenant le temps de travaux spécifiques autour de la définition-outil (maîtrise, usages).
- Par un premier travail sur l'ensemble des réels.
- Par un travail sur le langage, les notations ensemblistes et la logique
- En s'appuyant d'avantage sur ce qui est fait au lycée [suites, ...]

Des **ruptures** peuvent être **accompagnées** en faisant davantage prendre conscience à l'étudiant où se situent ces ruptures.

Conclusion : Il y a ruptures dans la transition.

Des **ruptures** qui peuvent **être atténuées** et **accompagnées** à l'université.

Les **ruptures** peuvent aussi **être réduites** par des activités qui s'inscrivent dans les programmes du Lycée et portent sur l'usage des **définitions comme outils**.
Une plus grande attention aux **outils logiques** et aux écrits mathématiques qu'ils permettent de produire.

Les **ruptures** peuvent également **être réduites** par **l'exploitation au lycée de certains objets** (comme les suites) ou outils (la calculatrice graphique) pour **enrichir** d'autres objets (comme les réels).