LILLE | LYON | RENNES | TOULOUSE

MATHÉ-MATI-QUES ET LAN-GAGES

FORUM MATHÉMATIQUES VIVANTES

17–19 MARS 2017

Panorama du thème

Commission française pour l'enseignement des mathématiques

semaine des mathématiques
DU 13 AU 19 MARS 2017

DESIGN GRAPHIQUE > WWW.ATELIERCHOSE.COM

CFEM

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Mathématiques et langages
Panorama du thème

Commission française pour l'enseignement des mathématiques

Michèle Artigue, Jérôme Germoni, Étienne Ghys, Edwige Godlewski (éd.)
Commission française pour l'enseignement des mathématiques

CFEM
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75005 PARIS
http://www.cfem.asso.fr

L'édition de ce livret a bénéficié du soutien du ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

Table des matières

Introduction

Étienne Ghys

Un jour, je commandais l'un de ces menus rapides sandwich-boisson-dessert et je demandais une eau minérale et un flan. La serveuse me répondit tout de go : « Non Monsieur, dans le menu, c'est boisson ou dessert et ce "ou" est "exclusif". » Comme elle semblait avoir à peu près mon âge, je lui répondis : « Vous, vous avez subi les maths modernes ! » Elle me répondit : « Oui, j'adorais ça. » Alors, je lui ai expliqué (ou peut-être rappelé) la différence que les mathématiciens font (ou faisaient) entre une paire et un couple. Les mathématiciens ont un rapport complexe avec la langue et ils n'hésitent pas à employer des mots de la vie de tous les jours pour leur donner des sens tout différents. Les exemples abondent : groupe, anneau, corps, espace, module, pour n'en citer que quelques-uns. À l'inverse, ils utilisent des mots incompréhensibles pour exprimer des choses toutes simples... mais avec précision. La gestionnaire de mon laboratoire m'a demandé ce que voulait dire l'expression « triangles isométriques » qu'on lisait dans le livre de son fils. Quand je lui ai dit que du temps de mes parents on parlait tout simplement de « triangles égaux », tout s'est éclairé. Mais je ne lui ai pas dit qu'au dix-huitième siècle, les livres de géométrie écrivaient qu'« un rectangle et un parallélogramme qui ont la même base et la même hauteur sont égaux » (alors qu'on dirait aujourd'hui qu'ils ont la même aire).

Le thème « Mathématiques et langages » (notez les pluriels) choisi pour la semaine des mathématiques 2017 est parfait. Il est parfait car il suscite le débat, et souvent des désaccords, entre mathématiciens, mais aussi dans le public général. Les textes réunis dans ce petit volume illustrent la variété des réactions des mathématiciens et des informaticiens face aux langages.

Pour simplifier à l'extrême, on peut distinguer deux points de vue.

Dans le premier, les mathématiques ne seraient qu'un jeu qui manipule des mots en respectant une grammaire rigide. Hilbert, au début du vingtième siècle, affirmait qu'on pouvait changer les mots « point, droite, plan » et les remplacer par « table, chaise, verre de bière » et que les théorèmes selon lesquels « par deux tables passe une chaise » et que « l'intersection de deux verres de bière est une chaise » seraient tout à fait justifiés. D'ailleurs, sans aller jusque là, la géométrie moderne utilise des objets appelés « immeubles, appartements et chambres » qui ont des propriétés étranges, telles par exemple que « par deux chambres passe au moins un appartement ».

Dans le second point de vue, le monde mathématique a une existence intrinsèque et les mathématiciens ont développé une langue... pour en parler. « La nature est un livre écrit en langage mathématique », écrivait Galilée il y a bien longtemps. Le « monde mathématique » est-il une partie de la nature ? Le mathématicien Arnold disait que la mathématique est un chapitre de la physique. Les scientifiques et les philosophes n'ont pas fini de discuter de la « déraisonnable efficacité des mathématiques » selon l'expression de Wigner. Pourquoi ce langage si abstrait permet-il de décrire notre monde ?

On peut aussi comprendre le thème « Mathématiques et langages » d'une autre façon. Les mathématiques peuvent-elles être utiles pour mieux comprendre la structure des langues naturelles, en linguistique ? Réciproquement, les linguistes peuvent-ils aider les mathématiciens ? J'ai été par exemple passionné par le livre de Quine intitulé *Le mot et la chose* qui pose des questions profondes sur le sens d'un texte et sur le processus de traduction (qui n'a pas grand-chose à voir avec l'idée naïve de « bijection » que les mathématiciens utilisent).

Ces questions ne sont pas réglées, ne le seront probablement jamais, et c'est tant mieux. On trouvera donc des opinions variées, et discordantes, dans les textes qui suivent.

ÉTIENNE GHYS
Directeur de recherche au CNRS, ENS de Lyon
Membre de l'Institut
Co-président du Comité scientifique du Forum Mathématiques vivantes

Apprendre et enseigner les mathématiques dans des contextes de diversité linguistique

Jill Adler

Les classes de mathématiques multilingues sont aujourd'hui chose commune dans de nombreux pays, du fait de la globalisation et des migrations. Dans les pays précédemment colonisés, elles sont en fait la norme mais, comme on l'imagine aisément, ces deux types de classes multilingues diffèrent substantiellement.

Une *classe de mathématique multilingue* peut être définie comme une classe où certains voire tous les élèves, et souvent l'enseignant lui-même, ont pour langue maternelle ou principale, une langue différente de la langue d'instruction (*LOLT* en anglais). On sait que langage et communication plus généralement sont cruciaux pour l'apprentissage et l'enseignement. Le défi dans les classes multilingues est que la langue qu'élèves et souvent enseignants utilisent naturellement pour penser, parler et communiquer n'est pas celle que l'école demande d'utiliser pour enseigner, apprendre et évaluer.

Le phénomène n'est pas récent et, notamment dans les contextes de post-colonisation, la recherche sur ces questions a commencé il y a une cinquantaine d'années déjà. Dans une étude historique récente, Setati Phakeng (2016) montre comment la centration initiale de cette recherche sur les difficultés rencontrées par les élèves qui apprenaient les mathématiques dans ce qui était pour eux une seconde ou troisième langue, a fait, même si ce n'était pas intentionnel, de l'apprenant le problème. Les actions ont alors visé à rendre les élèves plus compétents dans la langue d'instruction. Les chercheurs, cependant, ont assez vite réalisé que le problème était plus complexe. Ils se sont intéressés aux stratégies d'enseignement, ils ont essayé de comprendre les différences de structure entre les différentes langues mais aussi la façon dont elles étaient différemment valorisées. Ils ont montré qu'un travail délibéré valorisant les langues que les élèves apportent en classe permettait d'en faire des ressources pour l'apprentissage et l'enseignement. Ce changement de vision, d'une vision en terme de déficit ou d'obstacle à une vision en termes de ressource, est l'un des résultats les plus importants de la recherche dans le domaine, et il a modifié la description même du phénomène. Dans la récente étude internationale organisée par la Commission internationale de l'enseignement mathématique sur ce thème

(Barwell et al., 2016), on met ainsi l'accent sur la diversité linguistique (plutôt que sur le multilinguisme), en faisant valoir que cette diversité est aujourd'hui un élément déterminant de nombreuses classes, partout dans le monde.

Il y a beaucoup à apprendre de la recherche qui a été menée, notamment dans les vingt dernières années, avec notamment les études menées aux États-Unis concernant l'utilisation de l'espagnol et de l'anglais pour apprendre les mathématiques en anglais, ou plus récemment dans des pays comme la Suède. Il s'agit ici du premier type de contexte multilingue décrit plus haut lié à l'augmentation des communautés d'immigrants. Dans ce cas, les autres langues des apprenants (par exemple l'espagnol) ont leur propre registre mathématique. Ce n'est pas le cas pour les communautés marginales comme les Māoris en Nouvelle-Zélande (voir le texte de Bill Barton p. 11), ni dans la plupart des contextes post-coloniaux où les langues locales parlées par la majorité de la population ne disposent pas de registre mathématique bien développé. La Tanzanie est un exemple intéressant de pays anglophone post-colonial qui a développé un registre mathématique en Kiswahili, sa langue nationale, devenue langue officielle d'instruction, même si l'anglais résiste fortement, en particulier dans les écoles secondaires. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'étude ICMI ainsi qu'à l'ouvrage (Halai et Clarkson, 2016), qui illustrent bien la richesse de ce domaine de recherche tel qu'il s'est développé dans différents contextes nationaux.

Comme le montre Setati Phakeng dans son étude historique, les recherches menées en Afrique du Sud ont particulièrement stimulé ce travail et le changement de vision mentionné plus haut, montré l'importance de permettre aux élèves d'utiliser toutes leurs connaissances linguistiques et leur savoir-faire pour apprendre des mathématiques. L'Afrique du Sud est, de ce point de vue, un contexte très intéressant, non seulement parce qu'il s'agit d'un état démocratique relativement nouveau où persistent les effets pervers des politiques d'éducation de l'apartheid, mais aussi parce que l'Afrique du Sud compte maintenant onze langues officielles, dont deux seulement, anglais et afrikaans, ont des registres mathématiques entièrement développés. Ces deux langues sont minoritaires mais, de fait, l'anglais est la langue choisie dans de nombreuses écoles, rurales comme urbaines, en raison de son pouvoir, malgré une politique linguistique nationale d'éducation qui encourage le multilinguisme et l'enseignement en langue maternelle dans les premières années. À ceci s'est ajouté, ces dernières années, une immigration considérable en provenance des pays africains voisins qui accroît encore la diversité linguistique des classes.

La description des dilemmes et de la complexité de l'enseignement dans ces contextes qui exige la gestion simultanée dans la classe de la langue principale des élèves et de l'anglais, des mouvements entre langages mathématiques informel et formel, est un des résultats les plus intéressants de cette recherche (Adler, 2001). On y encourage la conversion de code ou *translanguaging* (Makalela, 2014) entre l'isiZulu et l'anglais par exemple, et la recherche sur des stratégies d'apprentissage comme celles consistant à apprendre aux élèves à discuter mathématiques entre eux dans leur langue commune puis à reformuler en anglais et en anglais mathématique, ou alors à proposer des tâches dans plusieurs langues. Les recherches récentes portent aussi de plus en plus sur la formation des enseignants de mathématiques, et la façon dont ils peuvent développer des pratiques de discours mathématique dans ces classes.

La diversité linguistique est notre présent. Connaissances et savoir-faire permettant de communiquer mathématiquement dans des classes multilingues constituent un élément fondamental du travail des enseignants de mathématiques. Nous avons beaucoup appris de la recherche menée jusque là même si, bien sûr, beaucoup de questions et problèmes restent à résoudre.

Références

Adler, J. (2001). *Teaching mathematics in multilingual classrooms.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N., Phakeng, M., Valero, P., Villavicencio Ubillús, M. (Eds.) (2016). *Mathematics Education and Language Diversity : The 21st ICMI Study.* Suisse : Springer.

Halai, A., & Clarkson, P. (Eds.) (2016). *Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms: Issues for Policy, Practice and Teacher Education.* Rotterdam : Sense Publishers.

Makalela, L. (2015). Moving out of linguistic boxes: the effects of translanguaging for multilingual classrooms. *Language and Education* 29 (3), p. 200-2017. doi :10.1080/09500782.2014.994524.

Setati Phakeng, M. (2016). Mathematics Education and Language Diversity: Past, Present and Future. *In* A. Halai & P. Clarkson (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms: Issues for Policy, Practice and Teacher Education,* p. 11-24. Rotterdam : Sense.

JILL ADLER
Université du Witwatersrand, Johannesburg
Traduit de l'anglais par MICHÈLE ARTIGUE

Calculer la langue, un enjeu interdisciplinaire

MAXIME AMBLARD

L'idée de « Mathématiques et langages » conduit à s'interroger sur le lien avec un langage particulier, celui que nous utilisons tous les jours pour communiquer. En français nous parlons de *langue* plutôt que de *langage*, mais l'ambiguïté est plus forte en anglais où nous parlons de *language* et de *natural language*. La volonté d'étudier systématiquement notre langage est une motivation ancienne, qui est à l'origine des travaux en linguistique. Mais l'apparition des machines à calculer a largement motivé les développements spécifiques à l'analyse de la langue.

Au milieu du vingtième siècle, le linguiste Noam Chomsky (même s'il n'est pas seulement connu pour ses travaux en linguistique) propose une formulation calculatoire explicite pour reconnaître les structures internes de la langue. Cette dynamique sera reprise par exemple par Richard Montague pour l'analyse de la sémantique de la langue. Son célèbre article "English as a formal language" débute par : "I reject the contention that an important theoretical difference exists between formal and natural languages." (« Je rejette la thèse selon laquelle il existe une différence théorique importante entre les langages formels et les langues naturelles. ») On voit bien apparaître l'idée qu'il faut appréhender la langue par le biais de la modélisation mathématique.

Dans la même voie, Noam Chomsky a proposé une caractérisation des langages formels qui a conduit à la définition de la hiérarchie de Chomsky-Schützenberger. Il y définit les classes comme des modèles possibles pour la description des propriétés structurelles des langues naturelles. Noam Chomsky et Marcel-Paul Schützenberger sont des pionniers de la théorie des langages, et tout cela est motivé par la question de la langue naturelle.

La relation entre linguistique et modélisation formelle est ancienne et d'autant plus riche que l'informatique permet de mettre en œuvre explicitement la seconde. D'ailleurs, les approches mathématiques ont également influencé la manière dont nous avons appréhendé la langue. Au sortir de la Seconde Guerre mondiale, la formalisation est très influencée par le problème de la traduction automatique, à l'origine pour identifier les informations contenues dans les messages transmis. Dans ce cas, le message exprimé dans une langue est transformé par une fonction mathématique, et seule l'application d'une autre fonction permettra de retrouver le contenu originel. La traduction est donc le résultat d'une transformation par une fonction mathématique d'un message. Évidemment cette approche est trop réductrice en ce qu'elle oublie qu'il s'agit là de la langue, soit une aptitude très spécifique des humains. Il a fallu considérer avec plus de sérieux les propriétés linguistiques pour obtenir des systèmes plus efficaces.

Aujourd'hui, les appareils numériques ayant pris une place considérable dans nos vies, des interfaces en langue naturelle permettent d'avoir des interactions bien plus fluides. Pour y parvenir, il nous faut encore travailler à mathématiser la langue pour développer des solutions efficaces.

MAXIME AMBLARD
Université de Lorraine,
équipe projet Semmagramme Inria/LORIA

La théorie des langages formels

PIERRE ARNOUX

Qu'est-ce qu'un langage formel ?

On étudie depuis longtemps la structure des langues : la grammaire de Panini, qui décrit le sanscrit, date du cinquième siècle avant notre ère. Mais la grammaire classique est une science totalement séparée des mathématiques ; telle qu'elle est enseignée dans les écoles, elle a d'abord une fonction normative : donner le « bon usage » de la langue.

Une théorie mathématique des langages formels n'est apparue que dans les années 1950 ; l'une de ses questions de base est de reconnaître si une phrase appartient à une langue donnée. L'une des premières applications pratiques est de reconnaître si un programme informatique, vu comme un texte d'un langage de programmation (Java, Python, C...) est bien formé.

Les concepts de base sont trompeusement simples : on se donne un ensemble fini A, l'alphabet, dont les éléments sont appelés lettres ; dans les premiers exemples, l'alphabet n'a que deux lettres, notées 0 et 1 (c'est avec cela que marchent les ordinateurs, et on peut toujours s'y ramener). On définit un mot comme une suite finie de lettres (en réalité, il vaudrait mieux considérer que cela correspond à ce qu'on appelle en grammaire classique une phrase), et un langage comme un ensemble de mots.

L'ensemble de tous les mots est noté A^*. Bien qu'il paraisse bien éloigné des mathématiques, on peut le munir d'une opération d'apparence un peu absurde : si on a deux mots U et V, leur produit UV est le mot obtenu en les concaténant, c'est-à-dire en les écrivant l'un à la suite de l'autre ; cette simple opération permet de poser des questions non évidentes ; par exemple, à quelle condition deux mots U et V commutent-ils, c'est-à-dire que $UV = VU$? On peut montrer que c'est le cas si et seulement s'ils sont tous les deux formés par la répétition d'un même mot.

Grammaires et machines

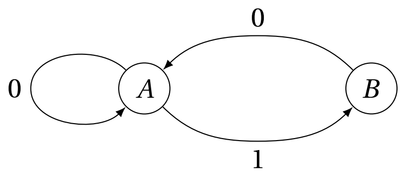
Les premières questions qui se posent sont de spécifier des langages, et de savoir reconnaître si un mot donné appartient à un certain langage ; c'est l'une des premières fonctions des logiciels de programmation, et tous ceux qui ont appris à programmer connaissent la réponse “Syntax Error” de l'ordinateur qui dit que le programme est mal formé, souvent par l'oubli d'une parenthèse ou d'une virgule.

Il y a plusieurs manières de spécifier un langage : on peut décrire tous ses mots, ou bien en donner une grammaire, ou encore fabriquer une machine qui le reconnaît. Voici un exemple très simple : le langage d'or est formé de tous les mots sur l'alphabet $\{0,1\}$ qui ne contiennent pas deux 1 consécutifs (il est ainsi nommé à cause des relations qu'il entretient avec le nombre d'or et la suite de Fibonacci). On peut le définir à partir de la grammaire suivante :

$$A ::= e \mid A0 \mid B0$$
$$B ::= A1$$

Ici, e représente le mot vide (qui n'a aucune lettre), A représente n'importe quel mot du langage d'or qui finit par 0 ou le mot vide, et B n'importe quel mot du langage d'or qui finit par un 1. Cette grammaire dit que, si un mot du langage d'or finit par un 1, le mot obtenu en effaçant ce 1 final est vide, ou est un mot du langage qui finit par un zéro.

On peut aussi le reconnaître avec une machine très simple qui lit les lettres du mot une à une :



On part de l'état A ; si on lit une lettre 0, on y reste, et si on lit une lettre 1, on passe dans l'état B. Si on lit une lettre 1 dans l'état B, la machine bloque et le mot n'est pas reconnu, et si on lit un 0 on revient en A. Si on peut arriver au bout du mot, il est dans le langage.

Classification des langages

On peut définir divers types de machines et de langages, et il existe toute une hiérarchie inventée depuis les années 50, qui est fondamentale pour la conception des langages informatiques, avec des langages de complexité variée. Par exemple, le langage d'or peut être reconnu de façon purement locale, en regardant les couples de lettres consécutives ; ce n'est pas le cas d'un autre langage très naturel, le langage des parenthèses, qui décrit des parenthèses qui se ferment correctement, avec autant de parenthèses ouvrantes que de fermantes, et qui est donné par la grammaire très simple suivante :

$$S ::= e \mid SS \mid (S)$$

Ce langage ne peut pas être reconnu de façon locale, car il faut s'assurer que toutes les parenthèses ouvrantes ont bien été refermées, donc il faut une mémoire arbitrairement grande.

Si cette classification fonctionne très bien pour des langages artificiels comme les langages de programmation, les langages « naturels » restent difficiles à décrire de cette façon, et rentrent mal dans les cases (entre autres parce qu'il est difficile de séparer la syntaxe, c'est-à-dire les règles de grammaire qui décrivent l'agencement des mots, et la sémantique, c'est-à-dire le rapport au sens et au monde que le langage décrit).

Algorithmique du texte

Une autre application de la théorie des langages est l'étude des algorithmes sur les mots, permettant par exemple de retrouver toutes les occurrences d'un mot dans un texte. De tels algorithmes sont aujourd'hui très utilisés, et ont trouvé un nouveau domaine d'application dans l'étude du génome, que l'on peut considérer comme un mot de très grande taille sur un alphabet à quatre lettres...

PIERRE ARNOUX
Département de mathématiques
Université d'Aix-Marseille

Te Reo Pangarau – Le langage mathématique māori : une *success story* ou un cheval de Troie ?

BILL BARTON

La langue māori – te Reo Māori – est une langue polynésienne parlée dans toute la Nouvelle-Zélande. Il existe quelques différences dialectales entre régions, mais c'est essentiellement une seule langue. Elle est très proche du tahitien, de l'hawaïen, du tongien et du rarotongien, et ceux qui parlent ces langues couramment se comprennent mutuellement.

Peu après le début de la colonisation de la Nouvelle-Zélande par l'Angleterre (devenue officielle avec le traité de Waitangi en 1840), des missionnaires créèrent des écoles ouvertes à la fois aux enfants européens et māoris. Certaines de ces écoles offraient un enseignement en langue māori et l'on produisit des manuels en māori modelés sur les textes anglais. Le premier fut publié en 1858. C'était la traduction en māori d'un manuel anglais et elle avait été effectuée par Wiremu Taratoa, un enseignant et missionnaire māori qui avait voyagé avec l'évêque Selwyn en Nouvelle-Zélande et dans le Pacifique. Dans cette traduction, qui utilisait principalement le langage quotidien, les termes techniques étaient gérés, soit en traduisant l'idée qu'ils portaient, soit tout simplement littéralement pour leur donner une consonance māori. Le mot « mathématique » devint ainsi « mahiwhika » [travail avec des figures] et « multiplication », « matapikikeihana », qui sonne māori mais n'avait pas de sens préalable. Après une période où l'on découragea l'enseignement en langue māori, à partir de 1976 on commença à créer des écoles primaires bilingues puis, au début des années 80, des sections bilingues dans quelques écoles secondaires. Et l'on créa aussi un petit nombre d'écoles d'immersion māori (Kura Kaupapa Māori).

Ces initiatives ouvrirent la voie à un travail intensif sur le langage des mathématiques en māori, et le ministre de l'éducation chargea un petit groupe de développer ce langage pour qu'il permette d'enseigner les mathématiques jusqu'à la fin de l'enseignement secondaire. Le groupe travailla de la façon suivante : il organisa d'abord une série de rencontres avec enseignants et communautés, là où existaient des écoles primaires bilingues, pour déterminer le langage mathématique élémentaire qui y était utilisé ; il travailla ensuite avec des mathématiciens et des experts en langue māori pour créer les nouveaux termes nécessaires à l'enseignement secondaire et finalement, il suggéra une liste de termes, accompagnée de notes grammaticales, et la soumit à la Commission de la langue māori, l'organisme gouvernemental qui est le « gardien » de cette langue. Ce processus s'acheva avec la rédaction d'un dictionnaire « temporaire » de termes suggérés et sa diffusion. Deux ans après, le cycle fut répété, en s'adressant d'abord aux communautés et aux écoles pour savoir quels termes avaient été adoptés ou non, puis en créant de nouveaux termes lorsque nécessaire, et en les soumettant à la Commission de la langue māori. Une nouvelle liste fut ensuite publiée. Et ce n'est qu'après un troisième cycle qu'un dictionnaire « final » fut élaboré et annexé au nouveau curriculum de mathématiques de 1994. Ce dictionnaire final a cependant continué à être modifié et il le sera sans doute encore dans le futur. On trouve une description détaillée de l'ensemble du processus dans Barton, Fairhall et Trinick (1998).

Il y a un épilogue à cette histoire. Après dix ans de travail, le petit groupe n'était pas pour autant satisfait. Certes, il avait réussi à produire un vocabulaire māori pour l'enseignement des mathématiques, et ce vocabulaire était généralement bien accepté. Mais ses membres avaient l'impression diffuse que quelque chose n'allait pas. Ce n'est que trois ans plus tard que l'un d'entre eux parvint à identifier le problème, connu aujourd'hui comme le cheval de Troie du langage mathématique māori.

Le māori a été initialement traduit en anglais par des missionnaires anglophones et, depuis lors, la grammaire māori s'est progressivement rapprochée de la grammaire anglaise. Mais il existe des particularités, et l'une d'elle réside dans la négation d'énoncés concernant les nombres, par exemple un énoncé comme : « Il n'y a pas trois œufs, il y en a quatre. » En māori, la négation prend une forme différente pour les adjectifs et pour les verbes, et les nombres y sont niés comme des verbes. Ce fut un premier indice. Des recherches complémentaires montrèrent ensuite qu'en langue māori, dans la période pré-européenne, les nombres étaient utilisés sous forme verbale. Et c'est d'ailleurs encore le cas en tahitien, une langue qui a été traduite en anglais par un chef tahitien, et non par un missionnaire anglais.

Le processus qui a conduit à moderniser la langue māori pour pouvoir l'utiliser dans un curriculum mathématique standard a, de fait, contribué à la corruption de cette langue, et ceci s'est traduit par la disparition de concepts mathématiques. À mes yeux, c'est une perte comparable à celle du matériel génétique causée par l'extinction d'une espèce. Quels dégâts peut-on faire avec les meilleures intentions du monde !

Référence

BARTON, B. ; FAIRHALL, U. & TRINICK, T. (1998) Tikanga Reo Tatai : Issues in the Development of a Maori Mathematics Register. For The Learning of Mathematics 18 (1), 3-9.

BILL BARTON
University of Auckland
Traduit de l'anglais par MICHÈLE ARTIGUE

Langages de programmation

Sylvie Boldo

La programmation. C'est elle qui spécifie, dans un langage très précis, ce que l'ordinateur doit exécuter. D'un algorithme décrit verbalement ou avec un dessin, la programmation fait une liste d'ordres que la machine va suivre pour obtenir la réponse désirée (valeur, image, application, etc.). Les programmes sont absolument nécessaires à notre interaction avec l'ordinateur, ils sont partout : un jeu est un programme au même titre qu'un navigateur (ou « butineur » comme Firefox, Internet Explorer…) ou qu'un système d'exploitation (Linux, Mac OS, Windows…), programme très long et compliqué, mais qui, comme pour un jeu, est un texte écrit dans un certain langage.

Le langage de la machine

Le seul langage compris par le processeur, l'unité centrale dans laquelle sont câblées toutes les opérations de base de l'ordinateur, est appelé « assembleur ». Il définit simplement les opérations électroniques que peut exécuter le processeur. Ce langage change d'un processeur à un autre. Il est donc très efficace puisque tout peut être ajusté « sur mesure », mais il est nettement plus compliqué à manipuler que des langages de plus haut niveau, sans faire d'erreur.

L'assembleur est une liste d'ordres, un fichier d'instructions, comme additionner deux valeurs, les comparer… L'une des instructions permet de sauter à un autre ordre de la liste. Cela permet par exemple de faire des boucles comme « Frapper un monstre jusqu'à ce qu'il disparaisse » ou « Avancer jusqu'à rencontrer un mur ».

Cette dernière boucle peut également s'écrire : « Avancer. S'il n'y a pas de mur en face, retourner à la ligne précédente. Tourner à gauche. » Ainsi, on ne tournera à gauche que lorsqu'on aura rencontré un mur. Mais ce genre de programme pose une question : que se passe-t-il si l'on rencontre un obstacle autre qu'un mur ? En effet, si un humain peut penser à contourner cet obstacle, un tel comportement n'a pas été programmé et le programme va donc tenter désespérément de passer à travers. Dans ce cas absurde, le programme exécutera bêtement l'instruction jusqu'à ce qu'il soit arrêté de l'extérieur (par le système d'exploitation ou par l'utilisateur).

Le compilateur, le traducteur homme-machine

Les langages actuels sont de plus haut niveau, ils permettent de préciser plus facilement toutes les actions à exécuter. Cependant, ces langages doivent eux-mêmes être exécutés. Pour cela, le programme source, qui n'est qu'un texte, va être « compilé ». Cela signifie qu'un programme (un de plus !), appelé « compilateur », va transformer le texte du programme source en une suite d'instructions en langage assembleur exécutables par l'ordinateur. Le compilateur joue un rôle de traducteur entre ce qui est écrit par le programmeur et ce qui est compris par la machine. Le compilateur produit un fichier exécutable que nous lançons pour utiliser le programme. De même qu'il y a de nombreuses langues (français, arabe, russe, japonais...), il y a plusieurs types de programmation, c'est-à-dire plusieurs façons de donner des ordres à l'ordinateur. Ces modes de programmation sont appelés « paradigmes ». Le choix du langage et du paradigme de programmation dépend de l'application, de l'algorithme, mais aussi de l'interaction du programme avec d'autres programmes et enfin du choix et de l'expertise du programmeur.

En conclusion, la programmation n'est pas seulement une simple traduction de l'algorithme vers la machine. La façon de faire, la gestion de la mémoire, les types de données peuvent rendre un même algorithme lent ou très efficace. La programmation introduit également des bugs aux conséquences parfois dramatiques. Les éviter reste un vrai défi, un défi scientifique. Pour aller plus loin, nous vous proposons de consulter sur Wikipédia l'article « Langage de programmation ».

Texte extrait de « Demandez le programme », *Interstices* :
`https://interstices.info/jcms/c_42286/demandez-le-programme`.
Article complet paru dans la revue *DocSciences* n° 5, « Les clés de la révolution numérique », éditée par le CRDP de l'académie de Versailles en partenariat avec Inria.

SYLVIE BOLDO
équipe projet Inria/LRI

Ces fichues variables…

René Cori

Bien plus que le recours à des symboles, c'est l'utilisation de **variables** qui distingue selon moi le langage mathématique de la langue usuelle. Et ce sont ces variables et les règles, presque jamais explicitées, auxquelles elles sont soumises qui posent de gros problèmes aux élèves, et parfois aussi aux professeurs !

C'est au collège que se fait, progressivement, ce qu'il est convenu d'appeler « le passage du numérique à l'algébrique », qui consacre l'utilisation de **lettres** pour désigner des nombres, connus ou inconnus. Mais les lettres sont présentes dès l'école primaire, par exemple pour nommer des objets géométriques (points, droites…).

Désigner par une lettre un objet bien déterminé n'est pas problématique et se fait aussi bien dans le langage courant qu'en mathématiques. Appeler D telle droite qu'on vient de dessiner au tableau ou appeler « Monsieur X » tel personnage d'une émission de radio, cela relève de la même démarche.

Là où les choses se compliquent, là où le langage mathématique se singularise, c'est lorsque les variables y sont **quantifiées**, ce qui est le cas dans l'immense majorité des énoncés des propriétés que nous enseignons à nos élèves. Cette procédure très particulière n'a pas d'analogue dans la langue usuelle. Bien sûr, on peut y restituer l'idée de la quantification à l'aide de constructions syntaxiques appropriées, mais celles-ci sont très différentes de la façon qu'a le langage mathématique de quantifier les variables.

Dans la proposition « Pour tout réel x, si $x \geqslant 1$, alors $x^2 \geqslant x$ », la lettre x ne sert pas à nommer un objet précis. Pour dire la même chose dans la langue naturelle, on n'éprouve pas le besoin d'utiliser une variable. On dira par exemple « Tout réel supérieur ou égal à 1 est inférieur ou égal à son carré », expression où la variable x ne figure pas du tout. Cela illustre le fait que, dans la proposition initiale, la variable x est **muette**. Si l'on veut faire intervenir une variable (par exemple en disant « Tout réel x supérieur ou égal à 1 est tel que x^2 est supérieur ou égal à x »), on est obligé de recourir à des tournures de phrase que la langue usuelle n'utilise jamais.

Pour ne rien arranger, dans le parler des mathématiciens, les quantifications sont très souvent implicites. Les propositions *conditionnelles* (du type « si…, alors… ») sont systématiquement porteuses d'une quantification universelle qui est omise. Ainsi, la proposition précédente sera le plus souvent réduite à « Si $x \geqslant 1$, alors $x^2 \geqslant x$ », la quantification sur x étant sous-entendue.

Les manuels scolaires, de la sixième à la terminale, sont truffés de propositions de ce type, sans que rien ne soit jamais dit sur le statut des variables ni sur les quantifications implicites.

Ce n'est pas fait pour faciliter la tâche de l'élève !

L'intérêt d'expliciter les quantificateurs apparaît clairement au moment où il s'agit de nier une proposition conditionnelle où la quantification universelle sur la variable n'est qu'implicite. Car si le quantificateur universel peut être omis, il est en revanche impossible de se passer du quantificateur existentiel qui lui correspond dans la négation.

Une expérience faite plusieurs fois auprès de professeurs de mathématiques en formation révèle qu'assez peu d'entre eux parviennent à formuler la négation de la proposition « Si un quadrilatère a deux angles droits, alors c'est un rectangle », tandis que la même tâche est réussie pratiquement à 100 % lorsque la quantification est explicitée. Il s'agit pourtant d'une formulation très banale, et être en mesure d'en donner la négation peut s'avérer utile, en particulier lorsqu'on cherche à prouver que la propriété exprimée est fausse !

Le refus, tenace, d'utiliser des quantificateurs, héritage de l'époque post-maths modernes, serait dû au fait que ces notions sont trop difficiles pour nos élèves. Cet argument est absurde. Les propositions mathématiques, même très élémentaires, comportent presque toujours des quantificateurs. Les manuels scolaires de tout niveau en regorgent, mais en les cachant soigneusement. Une explicitation de ces quantificateurs (sans recourir aux symboles $\forall$ et $\exists$) et quelques indications sur l'usage des variables et sur le fait qu'elles sont souvent muettes : voilà qui simplifierait grandement, j'en suis convaincu, la tâche des professeurs et des élèves.

RENÉ CORI
IMJ-PRG Université Paris-Diderot

La musique comme une langue

KEN DÉGUERNEL, NATHAN LIBERMANN et EMMANUEL VINCENT

L'histoire de l'analyse musicale en tant que science est un bon exemple pour voir les liens existants entre mathématiques et langages. En effet, de Pythagore à Euler et encore aujourd'hui, les liens entre les mathématiques et la musique sont très forts. À l'époque antique, la musique était partie intégrante des arts mathématiques appelés *quadrivium* avec l'arithmétique, la géométrie et l'astronomie. Pythagore avait créé une gamme musicale qui a survécu jusqu'à la fin du Moyen-Âge, à partir d'une méthode purement arithmétique en effectuant des fractions rationnelles d'une corde. L'arithmétique a également été utilisée pour effectuer des études musicologiques afin d'expliquer mathématiquement les principes inhérents au concept de tonalité en musique. Euler, en 1739, propose une structure en graphe avec une visualisation des quintes justes et des tierces majeures et mineures, permettant une représentation mathématique de l'intonation juste. Tout mouvement dans cette intonation pouvant être considéré comme un déplacement dans ce graphe. Aujourd'hui, les outils mathématiques algébriques de théorie des groupes ou géométriques sont encore utilisés pour la musique, avec des adaptations aux nouveaux styles musicaux, de la musique atonale à la pop.

Au vingtième siècle, il n'a pas fallu attendre longtemps pour que les outils linguistiques de caractérisation des langages formels, introduits par Noam Chomsky notamment, soient utilisés pour l'analyse musicale. Nous parlons en effet dans la vie courante de langage musical, mais nous pouvons également analyser la musique comme un langage formel. Lerdahl et Jackendoff ont proposé une théorie générative de la musique tonale dans le but de trouver des grammaires musicales pouvant expliquer scientifiquement les volontés d'un compositeur. Cette théorie propose des méthodes d'analyse de la structure musicale, du rythme et de l'harmonie.

En 1980, Morando proposait une approche statistique de l'analyse musicale. Considérant une partition musicale comme un ensemble de données séquentielles, il construit et analyse des tableaux de correspondance et montre notamment que l'analyse statistique retrouve rapidement des règles classiques. Conklin utilise des outils issus de la modélisation statistique du langage, il propose quant à lui une approche statistique pour la génération de musique. Pour ce faire, il considère un ensemble de vues de la surface musicale modélisant chacune un phénomène musical particulier. Il crée alors un modèle prédictif basé sur des techniques d'apprentissage automatique.

Les outils informatiques permettent d'implémenter ces différents outils mathématiques et linguistiques. Les ordinateurs sont alors capables de faire des analyses musicologiques, de composer de la musique respectant un certain style, et même d'improviser de la musique en interaction avec un improvisateur humain. Aujourd'hui, avec la possibilité d'utiliser de grands corpus musicaux et l'accessibilité des processeurs graphiques, l'application de nouveaux modèles d'apprentissage automatique comme les réseaux de neurones artificiels étend ce champ de recherche.

Ken Déguernel, Nathan Libermann et Emmanuel Vincent
Inria, Loria

Sur l'impact de la structure grammaticale des langues dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

VIVIANE DURAND-GUERRIER

Une opinion couramment répandue parmi les enseignants de mathématiques, et plus largement le grand public est que :

> En mathématiques, la question de la langue maternelle de l'élève ou de l'étudiant est moins importante que dans d'autres disciplines.

Un argument fréquemment utilisé pour soutenir ce point de vue est le fait que, dans cette discipline, on utilise un langage très codifié qui ne souffre pas d'ambiguïtés : au primaire et au secondaire, on fait essentiellement des calculs tandis qu'à l'université, on travaille essentiellement avec des énoncés formalisés utilisant uniquement des symboles dont la signification est claire et précise. Ceci peut conduire à l'idée que le travail en classe de mathématiques est moins affecté par une maîtrise insuffisante de la langue que d'autres disciplines réputées plus littéraires, et ceci tout particulièrement dans le cas d'élèves ou d'étudiants dont la langue d'instruction n'est pas la langue maternelle.

Il y a cependant plusieurs arguments à opposer à cela. Dans la classe de mathématiques, le discours du professeur et de ses élèves est porté par la langue d'instruction, héritant ainsi à la fois de sa richesse et de ses ambiguïtés tant lexicales que grammaticales (pour le français, voir par exemple [Fuchs, 1996]). Or, d'une part, les échanges oraux jouent un rôle très important dans la dynamique d'apprentissage en classe ; d'autre part, dès le début du collège, les élèves doivent être capables de rendre compte à l'écrit et à l'oral de raisonnements parfois complexes nécessitant une maîtrise du lexique et des structures grammaticales de la langue d'instruction. De nombreux travaux sur le lexique mathématique ont mis en évidence la polysémie des termes mathématiques et la nécessité de travailler sur une référence commune. Plus récemment, les chercheurs en éducation mathématique se sont penchés sur l'impact pour les apprentissages mathématiques des différences de structure grammaticale des énoncés mathématiques selon la langue d'instruction. Les difficultés engendrées par la différence de construction de la négation entre le français et l'arabe ont ainsi été étudiées par Ben Kilani ([Durand-Guerrier et Ben Kilani, 2004]) dans le cas de la Tunisie où l'enseignement des mathématiques se fait d'abord en arabe dans l'école de base (jusqu'à 14 ans) puis en français dans le secondaire, sans qu'une prise en charge de ce changement de langue ne soit mise en place par l'institution.

Edmonds-Wharten et al. (2016) soulignent, quant à eux, qu'au delà des difficultés et des incompréhensions engendrées par ces différences grammaticales, leur prise en compte explicite dans la classe par le professeur peut contribuer à enrichir l'expérience mathématique des élèves dans un contexte multilingue. Ceci invite à reconsidérer l'idée commune dans l'enseignement français qu'il est nécessaire de bannir l'usage de la langue maternelle en classe de mathématiques lorsque celle-ci n'est pas la langue d'instruction.

Références

DURAND-GUERRIER, V., BEN KILANI, I. (2004), « Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire tunisien », *Les Cahiers du français contemporain* 9, p. 29-55.

EDMONDS-WATHEN, C., TRINICK, T. et DURAND-GUERRIER, V. (2016), "Impact of Differing Grammatical Structures in Mathematics Teaching and Learning". In Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N., Phakeng, M., Valero, P., Villavicencio Ubillús, M. (Eds.) *Mathematics Education and Language Diversity*, The 21st ICMI Study, p. 23-46.

FUCHS, C. (1996), *Les ambiguïtés du français*, Collection l'essentiel français, *Ophrys*.

VIVIANE DURAND-GUERRIER
Université de Montpellier

Dans un cours de probabilités, on s'intéresse à la composition d'urnes pouvant contenir des boules blanches et des boules rouges. Et on considère l'événement « Toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges ». Comment interpréter l'énoncé définissant cet événement ? Voici des réponses fréquemment obtenues avec des élèves ou des étudiants :

(1) Il est faux que toutes les boules contenues dans l'urne soient rouges.

(2) Aucune boule contenue dans l'urne n'est rouge.

(3) Il y a au moins une boule contenue dans l'urne qui n'est pas rouge.

(4) Une boule contenue dans l'urne n'est pas rouge.

(5) Une boule contenue dans l'urne est blanche.

(6) Toutes les boules contenues dans l'urne sont blanches.

(7) Les boules rouges ne sont pas contenues dans l'urne.

L'interprétation 1 est la signification de la phrase suivant la norme linguistique française ; 2 est une signification rencontrée fréquemment dans les usages courants (Fuchs) ; 3 est la formulation canonique du professeur de mathématiques ; 4 et 5 sont des formulations ambiguës : on pourrait aussi bien vouloir dire « il existe » que « tout » ; 6 est une reformulation de l'énoncé initial en remplaçant « ne sont pas rouges » par « sont blanches » ; 7 est une phrase synonyme de la phrase 2.

FIGURE 1. Exemple d'ambiguïté grammaticale dans le cas de la négation d'un énoncé universel

À propos du langage et des notations mathématiques

Jocelyne Ehrel

Lorsqu'un film ou une série met en scène un savant en plein travail, celui-ci est souvent devant un tableau rempli de signes étranges. Il est vrai que les mathématiciens collaborent souvent devant un tableau, qu'ils remplissent de symboles bizarres. On y reconnaît des lettres de l'alphabet, des chiffres, des opérations comme l'addition, mais aussi des lettres de l'alphabet grec, des symboles (∞, $\forall$, $\int$, ∇, etc.). Cela peut faire peur !

Pourtant, quelle que soit sa langue maternelle, un mathématicien saura lire la formule cabalistique. Il ne comprendra pas tout, mais il lira. Le langage mathématique est international, presque universel (il subsiste des différences selon les cultures). De plus, quelques usages communément admis facilitent la lecture.

Il faut cependant faire un effort pour apprendre à lire et à écrire les mathématiques. L'écriture mathématique est assez rébarbative, un peu comme le solfège. Pourtant, quand on maîtrise les signes d'une partition musicale, on prend plaisir à l'interpréter. En mathématiques, quand on comprend une formule, on peut la transformer, en déduire des nouvelles formules, avoir de nouvelles idées, démontrer des théorèmes. La recherche en mathématiques passe souvent par des calculs ou des déductions logiques basées sur l'écriture. Le plaisir d'avoir trouvé un résultat ou réussi une démonstration est analogue au plaisir de jouer de la musique.

Ainsi, le langage mathématique joue un rôle majeur à la fois dans la communication des idées et dans la créativité. Elle joue aussi un rôle dans la vérification de théorèmes. Très souvent, une démonstration est décomposée en une succession de preuves intermédiaires, où la conclusion d'un théorème est par exemple une hypothèse du théorème suivant. Ainsi, on peut vérifier séparément chaque démonstration, puis leur enchaînement. Les outils de démonstration automatique sont plus ou moins basés sur ce concept.

Il est toutefois bon de rappeler que la communication passe aussi par la langue usuelle, que ce soit la langue maternelle ou l'anglais, qui s'est imposé dans les revues scientifiques internationales. L'art de la pédagogie relève donc d'un savant dosage entre explications textuelles et formules mathématiques.

Références

Cédric Villani, « La langue de chez nous », *Images des mathématiques,* février 2016 : http://images.math.cnrs.fr/La-langue-de-chez-nous.html

Cédric Villani, « L'écriture des mathématiciens », *Écritures : sur les traces de Jack Goody,* Enssib, É. Guichard, éd., 2012. Actes d'un colloque tenu en 2008 à l'Enssib. http://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2012/10/ecriture.pdf

JOCELYNE EHREL
Inria Rennes et IRMAR (Université Rennes 1)

Le dire mathématique

NAZIM FATÈS

Y a-t-il un dire mathématique comme il y a un dire poétique ? Y a-t-il un langage mathématique comme il y a un langage musical ? L'infini, par exemple, peut-il se dire mathématiquement ? Dans la conclusion de ses *Figures de l'infini* [1], Tony Lévy cite en exergue ces lignes de René Char :

> Parmi tout ce qui s'écrit hors de notre attention, l'infini du ciel, avec ses défis, son roulement, ses mots innombrables, n'est qu'une phrase un peu plus longue, un peu plus haletante que les autres.
>
> *Possessions extérieures*

Curieuses paroles, qui pourraient néanmoins nous éclairer sur le langage mathématique. Celui-ci passe pour être le seul langage qui soit universel (*mathesis universalis*) et exact (principe de non-contradiction, principe du tiers exclu). L'infini forme le quotidien du mathématicien. Quand j'énonce le théorème de Pythagore, mon dire porte sur une *infinité* de triangles rectangles. Pourtant, en se saisissant de ce mot, le poète nous parle d'un simple jeu d'écriture...

Peut-être cherche-t-il à attirer notre regard au-delà de la question de l'universel et de l'exact, reprenant par là une longue tradition de pensée. Dans ses *Méditations métaphysiques*, Descartes met en scène un *chiliogone*, un polygone à mille côtés, et nous dit que que l'imagination ne peut saisir cet objet dans toute sa clarté, c'est-à-dire le différencier d'autres figures proches, telles un polygone à mille et un côtés [2]. Certes, je peux bien énoncer une foule de « vérités » à son propos (il a 498 500 diagonales) mais ce *dire* est-il autre chose qu'une simple réécriture d'une formule plus générale ? Chez Pascal, « le cœur *sent* qu'il y a trois dimensions dans l'espace et que les nombres sont infinis [...] » [3]. Intuition plutôt qu'imagination ? « Pas de fait empirique ici mais [...] quelque chose qui passe la raison et son analyse des concepts », répond J. Beaufret [4]. Autrement dit, les mathématiques sont aussi affaire de *sentiment*, non pas au sens que le langage usuel donne

1. *Figures de l'infini*, Tony Lévy, éditions du Seuil, 1987.

2. *Méditations métaphysiques*, Descartes, méditation sixième.

3. *Pensées*, Pascal, Lafuma 110, Brunchvicg 282.

4. *Le fondement philosophique des mathématiques*, Troisième conférence (6 mai 1981), Jean Beaufret, éditions du Seuil, 2011, p. 127.

à ce mot, mais dans la mesure où il s'agit d'abord de *sentir,* puis de s'engager sur une voie pour *rendre compte* de ce qui fut vu et estimé digne d'être éclairci. Il y a là autant esprit chevaleresque que risque d'errance (Don Quichotte). Ainsi se dessine un lien de parenté entre le langage mathématique et le langage poétique : tous deux sont un art de dire qui ramène à la surface ce qui vient des profondeurs du silence.

NAZIM FATÈS
Chercheur Inria au LORIA, Nancy

Borges et nous

Jérôme Germoni

Langage et numération chez Borges

L'écrivain Jorge Luis Borges écrit dans « La langue analytique de John Wilkins » (*Enquêtes*) : « Descartes, dans une lettre datée de novembre 1629, avait déjà noté qu'au moyen du système décimal de numération, nous pouvons apprendre en un seul jour à nommer toutes les quantités jusqu'à l'infini et à les écrire dans une langue nouvelle, qui est celle des chiffres. » Borges décrit au passage le système binaire et évoque la numération dans une base quelconque. Son propos est de mettre en avant la puissance de la numération de position pour décrire de façon systématique et compréhensible tous les nombres. (Le philologue Borges se soucie principalement de nommer mais bien sûr, ce type de numération est efficace aussi pour les opérations arithmétiques. Par contraste, allez multiplier XXXIX par CXVIII (cela fait MMMMDCII), ou pire, MMCDLXXVI par CCXXXIV, qui dépasse le pouvoir d'expressivité des chiffres romains.)

La cohérence de cette numération est soulignée par comparaison à un comptage qui utiliserait une infinité de symboles, un par nombre : cette méthode est pudiquement présentée comme « à l'usage des divinités et des anges », qui peuvent en effet retenir une infinité de noms. Dans la nouvelle « Funes ou la mémoire » (*Fictions*), Borges est plus direct. Le personnage éponyme est un idiot doté d'une mémoire infaillible : « Deux ou trois fois il avait reconstitué un jour entier ; il n'avait pas hésité une seule fois mais chaque reconstitution avait elle-même demandé un jour entier. » Or Funes « avait imaginé un système original de numération » où chaque nombre correspond à un signe. « Au lieu de sept mille treize, il disait (par exemple) Máximo Pérez ; au lieu de sept mille quatorze, Le chemin de fer [...]. Au lieu de cinq cents, il disait neuf. » Là, Borges parle d'une « rhapsodie de mots décousus [qui est] précisément le contraire d'un système de numération ». En effet !

Dans les deux textes, Borges rapproche les systèmes de numération du langage pour en souligner le caractère arbitraire et ambigu. « Une fois exclus les mots composés et dérivés », le sens des autres mots est purement conventionnel, de sorte que « toutes les langues du monde sont également inexpressives ». Mais « dans la langue analytique conçue par Wilkins au milieu du XVII^{e}, chaque mot se définit lui-même. [...] Il divisa l'univers en quarante catégories ou genres, subdivisibles en sous-genres, subdivisibles à leur tour en espèces. Il assigna à chaque genre un monosyllabe de deux lettres ; à chaque sous-genre, une consonne ; à chaque espèce une voyelle. Par exemple : *de* veut dire élément ; *deb*, le premier des éléments, le feu ; *deba*, une portion de l'élément feu, une flamme. » Ainsi, « les mots [...] ne sont pas des symboles arbitraires et grossiers : chacune des lettres qui les composent est significative, comme le furent les lettres de l'Écriture sainte pour les cabalistes. »

Hélas ! La tentative de Wilkins échoue parce que sa typologie initiale est vaine : les catégories sont vagues et se recoupent. En effet, explique Borges, « il est notoire qu'il n'existe pas de classification de l'univers qui ne soit arbitraire et conjecturale. La raison en est fort simple : nous ne savons pas ce qu'est l'univers. » Malgré tout, nous voulons, il faut (en) parler et cela nous renvoie à l'arbitraire.

Dans « Funes », Borges rappelle une expérience de pensée dans laquelle « Locke, au XVII^{e} siècle, postula (et réprouva) une langue impossible dans laquelle chaque objet, chaque pierre, chaque oiseau, chaque branche eût un nom propre ; Funes projeta une fois une langue analogue mais il la rejeta parce qu'elle lui semblait trop générale, trop ambiguë. En effet, non seulement Funes se rappelait chaque feuille de chaque arbre de chaque bois, mais aussi chacune des fois ou il l'avait vue ou imaginée. » Nommer un objet n'a pas d'intérêt si ce n'est pour le mettre en relation avec d'autres. Mais cet acte de pensée qui consiste à nommer plutôt des catégories que des objets nous rejette dans l'ambiguïté.

L'arbitraire et l'ambigu sont les deux malédictions du langage, conséquences de notre ignorance. Les systèmes de numération semblent s'y soustraire mais n'oublions pas : ils ne constituent pas, et de loin, la totalité du discours mathématique.

La tentation de la concision absolue

Plusieurs nouvelles de Jorge Luis Borges proposent des objets littéraires totalisants dont voici quelques exemples. La bibliothèque de Babel contient tous les livres imaginables de quatre cent-dix pages[5]. À la fin de la nouvelle éponyme apparaît un livre « de format ordinaire, imprimé en corps neuf ou en corps dix, et comprenant un nombre infini de feuilles infiniment

5. On peut en trouver une approximation en ligne : `http://libraryofbabel.info/`.

minces » : toute la littérature humaine passée et à venir pourrait donc être recueillie dans ce volume. Quelques années plus tard, « Le livre de sable » en offre une variante.

« Le miroir et le masque » conte une histoire en trois temps. D'abord, un poète déclame sa plus belle œuvre à un roi qui le récompense par un miroir d'argent et lui en commande une autre. Un an plus tard, le poète revient avec un poème encore meilleur qui lui vaut un masque d'or et une nouvelle commande. La troisième année, le poète pâle chuchote un vers à l'oreille du roi qui somme le poète de se tuer, rend sa couronne et finit sa vie en vagabond : une telle puissance littéraire était insupportable. « La parabole du palais » et « Undr » évoquent également des poèmes d'un seul vers ou même d'un seul mot qui concentrent toute la littérature.

Bien sûr, il y a là un paradoxe : faire tenir la littérature dans « le Mot qui résume l'univers », c'est annihiler la littérature ! Cela nous renvoie à l'œuvre silencieuse « $4'33''$ » du musicien John Cage ou au *Carré blanc sur fond blanc* de Kasimir Malevitch. Il n'en reste pas moins que le thème de la concision absolue est récurrent chez Borges. La compacité de ses œuvres et sa façon de revenir sans cesse sur un petit nombre de thèmes suggèrent que c'était une sorte d'idéal.

D'un certain point de vue, les mathématiciens suivent eux aussi cet idéal de concision. Jean-Pierre Kahane présente les axiomes comme un *élixir de pensée*[6] : quelques propositions qui concentrent tous les concepts et permettent (par dilution, pourrait-on dire) de développer la théorie entière. Cinq axiomes suffisaient à Euclide de retrouver toute la géométrie du monde environnant[7]. Pour décrire le paradigme dans lequel (presque) toutes les mathématiques actuelles sont développées, il suffit de la petite dizaine des axiomes de Zermelo-Fraenkel – et le reste peut prendre place[8] !

Dans un esprit un peu différent, la formule de Stokes[9] permet en neuf symboles de calculer des surfaces et des volumes, des grandeurs physiques variées, mais aussi des invariants abstraits de « variétés différentiables » :

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

6. Voir son texte p. 52.

7. Comme l'a remarqué David Hilbert, à l'aune des exigences formelles du XX^{e} siècle, il fallait en fait en ajouter quelques-uns.

8. L'un des axiomes est en fait une famille infinie d'axiomes. Cela donne un cadre formel qui contient en puissance, mais en puissance seulement, toutes les mathématiques.

9. C'est l'occasion de vanter le roman éponyme de Michèle Audin.
Voir `http://images.math.cnrs.fr/Un-roman-dont-l-heroine-est-une-formule`.

Pour que tant d'information soit contenue dans si peu de symboles, on imagine bien qu'il a fallu un processus de concentration analogue à celui que décrit Kahane. William Boyd illustre cette idée dans *Brazzaville Plage*. Le mari de l'héroïne est un mathématicien qui cherche à découvrir une formule pour décrire le chaos. À la fin du roman, il parvient à ceci : $z^2 + c$. Cela évoque les travaux de Gaston Julia et d'autres [10], repris et popularisés par Benoît Mandelbrot, sur les fractals. Même si ce procédé pour fabriquer du chaos ne capture pas la théorie entière, c'est néanmoins une façon percutante de l'appréhender en quatre symboles à peine (et quelques dizaines de pages de sous-entendus).

Ce qu'incarnent les poèmes d'un mot évoqués par Borges, c'est une recherche de la concision pour décrire avec le moins de mots possible une partie toujours plus grande du monde : même s'il est voué à l'échec, ce mouvement résonne en mathématiques.

Références des textes de Jorge Luis Borges

« La bibliothèque de Babel » *in Fictions* (*Ficciones*, 1944), trad. Roger Caillois, Nestor Ibarra et Paul Verdevoye, Gallimard, 1951.

« L'Aleph » *in L'Aleph* (*El Aleph*, 1949), trad. Roger Caillois et René L.-F. Durand, Gallimard, 1967.

« La parabole du palais » *in L'auteur* puis *L'auteur et autres textes* (*El Hacedor*, 1960), trad. Roger Caillois, Gallimard, 1965.

« Le livre de sable », « Le miroir et le masque » et « Undr » *in Le livre de sable* (*El Libro de arena*, 1975), trad. Françoise Rosset, Gallimard, 1978.

JÉRÔME GERMONI
Maison des mathématiques et de l'informatique
ICJ, Université Lyon 1

10. C'est l'occasion de vanter le livre d'histoire *Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918 et après...* de Michèle Audin. Voir `http://images.math.cnrs.fr/Audin-Fatou.html`.

Écriture automatique 2.0

Jérôme Germoni, Pierre-Antoine Guihéneuf
et Frédéric Le Roux

Grâce à l'informatique, l'angoisse de la page blanche ne sera-t-elle bientôt qu'un lointain souvenir ? Autrement dit, peut-on demander à un ordinateur d'écrire un texte original et cohérent par un procédé automatique ?

Dans son article *A Mathematical Theory of Communication* publié en 1948, Claude Shannon, dont on célèbre le centenaire de la naissance cette année, a proposé une méthode simple pour produire un texte aléatoire. On commence par choisir un livre de référence, par exemple *À la recherche du temps perdu* de Marcel Proust. On ouvre une page au hasard et on pose son doigt au hasard sur la page ; on écrit sur une feuille le premier mot de la phrase indiquée – par exemple : « Le ». On ouvre ensuite une autre page du livre au hasard et on cherche la première apparition de ce mot à partir de cette page – par exemple « soutenaient légèrement *le* plafond s'écartaient ». On écrit alors sur notre feuille le mot suivant du livre – ici, « plafond ». On choisit à nouveau une page du livre au hasard et on cherche la première apparition de « plafond » à partir de cette page – par exemple : « suspendu au *plafond* par des » et on écrit le mot « par » sur notre feuille... Et ainsi de suite jusqu'à tomber sur un point. La suite donne, par exemple : « Le plafond par des yeux de clouer ses instruments interchangeables d'un coup qui n'eût paru quelque message d'elle [...] ». L'ordinateur permet d'automatiser la procédure. Mais on aura du mal à faire passer la phrase obtenue pour du véritable Proust !

Depuis Shannon, d'autres méthodes plus élaborées ont été créées, dont certaines fondées sur le concept de « grammaire non contextuelle » introduit par le linguiste Noam Chomsky en 1956. Ces méthodes ont été récemment utilisées par le mathématicien Nate Eldredge pour créer le programme *Mathgen*, capable de produire automatiquement et en une fraction de seconde des articles formatés comme des articles de recherche en mathématiques, et qui ne contiennent que des phrases grammaticalement correctes, comme celle-ci : « la construction par Hito de domaines résolubles cocomplets d'Erdös a été une étape décisive dans le calcul elliptique. » Pour un profane, la différence avec un véritable article de recherche n'est sans doute pas flagrante, mais un mathématicien professionnel comprend très vite que le texte qu'il a sous les yeux n'a absolument aucun sens.

Ces galimatias ne devraient donc pas pouvoir aider à vaincre une crise d'inspiration. Pourtant, deux articles produits par *Mathgen* ont été acceptés pour publication dans des revues « scientifiques ». La publication dans ces revues se faisant aux frais de l'auteur, on peut imaginer que les éditeurs acceptent d'y publier tout ce qui ressemble de près ou de loin à des mathématiques, peu importe le contenu, et que le rapport d'expert, qui note que « les résultats obtenus sont originaux, nouveaux et intéressants » a lui aussi été produit par un procédé automatique... On est bien loin du fonctionnement standard des journaux scientifiques, dont les éditeurs, qui sont eux-mêmes des chercheurs, demandent à plusieurs spécialistes du domaine un rapport détaillé sur l'article avant de prendre leur décision. Face à la page blanche, en mathématiques comme ailleurs, inspiration et transpiration restent d'actualité !

N.B. L'article de Shannon de 1948 est considéré comme la fondation de la théorie de l'information. Outre la façon de décrire les textes présentée ici, il contient un contexte général pour penser un système de communication et les notions d'entropie de l'information et de redondance qui sont intensivement utilisées jusqu'à aujourd'hui. On peut le trouver en ligne sur `http://tinyurl.com/ShannonInformation` et il est analysé (en anglais) sur Wikipedia en anglais : `http://tinyurl.com/Shanon-wiki`.

JÉRÔME GERMONI
Maison des mathématiques et de l'informatique
ICJ, Université Lyon 1

PIERRE-ANTOINE GUIHÉNEUF et FRÉDÉRIC LE ROUX
IMJ-PRG, UPMC-Sorbonne Universités

La lingua franca des mathématiciens

Étienne Ghys

Dans quelle langue sont écrits les articles de recherche en mathématiques ? En anglais ? Souvent, mais pas toujours : les mathématiques sont peut-être la dernière science exacte dans laquelle subsiste une proportion – faible mais significative – de publications en français.

Certains penseront que la langue importe peu puisqu'il s'agit de formules mises bout à bout : ce serait également une erreur. Même si les symboles jouent un rôle central, un article est destiné à des êtres humains qui parlent une langue naturelle...

Depuis toujours, le style mathématique hésite entre deux tentations opposées. D'un côté, on peut considérer que le seul but est de démontrer un théorème nouveau et de s'assurer qu'il ne contient pas d'erreur. Il faut alors enfiler des syllogismes froids, sans nécessité d'en dévoiler le sens profond ; les articles qui en résultent sont en quelque sorte destinés à des ordinateurs.

L'informatique théorique a d'ailleurs fait récemment des progrès fantastiques dans la vérification automatique de démonstrations. À l'opposé, l'auteur peut aussi souhaiter expliquer à son lecteur le cheminement de sa pensée, le convaincre de l'intérêt de ses résultats, et lui transmettre des idées. La rigueur contre l'intuition, la syntaxe contre la sémantique : le débat n'est pas nouveau en mathématiques !

Suivant les auteurs, les époques, les cultures ou les domaines de recherche, les textes publiés penchent d'un côté ou de l'autre. Par exemple, beaucoup considèrent que les textes mathématiques du XIX^e^ siècle étaient un peu « bavards ».

On dispose aujourd'hui d'un outil d'aide à l'écriture mathématique d'une souplesse extraordinaire qui offre une grande liberté de style aux auteurs. Inventé par l'informaticien Donald Knuth en 1977, TeX (prononcer *tekk*) est devenu, après quelques améliorations, LA langue dans laquelle s'expriment tous les mathématiciens. Superficiellement, on pourrait penser que ce n'est qu'un traitement de texte parmi d'autres, mais il s'agit bien d'un véritable langage. Il n'a aucun des inconvénients de Microsoft Word, unanimement haï dans la communauté !

TeX est un logiciel gratuit, indépendant du matériel utilisé, qui ne change pas tous les cinq ans et qui ne prend aucune décision à votre place. Sa grande originalité est de dissocier complètement la forme du fond. La rédaction se fait dans un simple fichier texte, sans aucune mise en pages mais contenant en revanche des commandes qui structurent l'ensemble.

Ce fichier source contient toute l'information ; son contenu est donc virtuellement éternel ! Ce n'est que dans un deuxième temps, celui de la compilation, que l'objet typographique est produit, en suivant les instructions précises de l'auteur.

De nos jours, TEX est devenu la lingua franca des mathématiciens, mais aussi des informaticiens et d'une bonne partie des physiciens. Avec un peu d'habitude, on peut même lire le fichier non compilé, et beaucoup de courriers électroniques entre collègues sont rédigés directement dans ce langage (un peu abscons, il faut en convenir). Il n'est pas exagéré de dire qu'en modifiant leur mode d'expression TEX a changé la vie des mathématiciens, et a donc transformé les mathématiques.

ÉTIENNE GHYS
CNRS, École normale supérieure de Lyon

« Un langage commun » (Claude Lévi-Strauss) Le contexte épistémologique particulier des décennies de l'après Seconde Guerre mondiale

HÉLÈNE GISPERT

L'influence grandissante des conceptions du groupe Bourbaki dans les années 1950 crée en France un contexte épistémologique particulier, en rupture avec celui de l'avant-guerre, que permettent de camper les deux citations suivantes :

> Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites – les structures mathématiques ; et il se trouve – sans que l'on sache bien pourquoi – que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ses formes ; comme par une sorte de préadaptation.
>
> [Nicolas Bourbaki, « L'architecture des mathématiques », 1947]

> Ainsi donc, dans l'espace de quelques années, des spécialistes aussi éloignés en apparence les uns des autres que les biologistes, les linguistes, les économistes, les sociologues, les psychologues, les ingénieurs des communications et les mathématiciens, se retrouvent subitement au coude à coude et en possession d'un formidable appareil conceptuel dont ils découvrent progressivement qu'il constitue pour eux un langage commun.
>
> [Claude Lévi-Strauss, « Les mathématiques de l'homme », 1954]

Dans la première, qui n'est pas si particulière au contexte français, Bourbaki expose deux idées, la première : le rôle nouveau, central, que joue la notion de structure dans les mathématiques qui devient le noyau de ce qui est alors appelé les « mathématiques modernes », la seconde étant la surprenante efficacité de telles mathématiques pour rendre compte de la réalité, ce qui devint un des arguments les plus usités pour la nécessité de la réforme dite des mathématiques modernes.

Quant à la citation de l'anthropologue français Claude Lévi-Strauss, elle rappelle l'énorme importance du structuralisme, qui constituait à cette époque en France le courant philosophique dominant dans toutes les sciences – y compris humaines et sociales. La nouvelle mathématique et sa structure étaient généralement considérées comme un outil scientifique et un langage essentiels pour accéder à tout savoir.

Dans le domaine de l'enseignement, une des conséquences de ce rôle donné aux mathématiques a été dans les années 1960 la création d'une commission ministérielle de réforme de l'enseignement des mathématiques dont la feuille de route comprenait, entre autres, la promotion de ces mathématiques dites modernes, langue universelle, instrument de pensée privilégié de toutes les sciences, y compris humaines et sociales. À ce titre certains des réformateurs défendaient l'idée que « la mathématique » était plus proche de la grammaire que des sciences physiques. Une position qui influença les programmes que proposa la commission et qui fut dans les années 1970 l'objet de grandes polémiques autant dans les milieux scientifiques que dans le grand public.

Cette conception des mathématiques, de leur enseignement, a marqué les décennies 1950-1970. Mais dès les années 1980, d'autres points de vue ont été défendus par les réformateurs de l'enseignement des mathématiques et ont nourri les programmes. Le temps de la domination quasi exclusive des idées « bourbakistes », tant dans l'enseignement que dans la recherche, a vécu.

HÉLÈNE GISPERT
Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay (GHDSO) - EA 1610
Université Paris Sud

Synonymes, homonymes

GILLES GODEFROY

Synonymes

Dès nos premiers pas dans l'univers mathématique, nous sommes confrontés aux synonymes. Mais le plus souvent, ceux-ci s'avancent masqués, sous la forme d'une définition, d'une équation ou d'une équivalence. La ligne droite est le plus court chemin entre deux points, $5 + 7 = 12$, un triangle est équilatéral si et seulement si ses trois angles sont égaux à 60 degrés... Nous pourrions interpréter ces énoncés familiers en disant par exemple que les expressions « plus court chemin entre deux points » et « ligne droite » sont synonymes. Est-il bien clair, cependant, qu'en employant indifféremment ces deux termes on ne perd aucune information ? Sommes-nous sûrs de désigner exactement la même chose, ou bien l'identification que nous formulons est-elle un reflet de notre ignorance ? Par exemple, l'homme de la rue pourrait croire que calculateur et mathématicien sont synonymes quand c'est loin d'être le cas. Pourtant la clarté des énoncés mathématiques les met, à première vue, à l'abri de ces imprécisions : $5 + 7 = 12$, n'est-ce pas absolu et universel ?

Oui, si l'on est d'accord sur le sens des signes qui composent cette expression. Les nombres 5, 7 et 12 seront accessibles à partir de 1, mais définir l'unité est bien délicat (voir la note du bas de la page E.III.24 du Bourbaki de théorie des ensembles), et c'est aussi le cas de l'égalité comme Archimède l'a déjà compris. Passons donc au plus court chemin entre deux points : les rayons du soleil tels qu'on les voit suivent bien une droite, mais le plus court chemin sur une sphère sera un arc de grand cercle. Quant au triangle équilatéral sur notre Terre, il peut avoir trois angles droits s'il est formé d'un quart de l'équateur et de deux méridiens perpendiculaires ! Nous voyons donc qu'il nous faut bien préciser le cadre dans lequel on s'exprime avant de donner un sens univoque à nos expressions mathématiques, qu'elles soient faites de symboles ou de mots.

Les logiciens du siècle dernier ont mis toute leur peine à construire ces cadres, en énonçant des systèmes d'axiomes sur lesquels se base une théorie mathématique : l'arithmétique repose ainsi sur les sept axiomes de Peano, la théorie des ensembles sur les neuf axiomes de Zermelo et Fraenkel. Dès lors que les objets de la théorie et leurs règles de manipulation sont ainsi précisés, nous pouvons penser que les mathématiques reposent sur une syntaxe sans défaut, d'où sont chassés de pseudo-synonymes trompeurs. Le premier exemple d'une telle axiomatique remonte aux *Éléments* d'Euclide et à ses cinq *postulats*, qui sont : deux points déterminent un segment de droite et un seul ; tout segment de droite se prolonge en un segment de droite plus grand ; étant donné un centre et un rayon le cercle correspondant existe ; tous les angles droits sont égaux ; par un point extérieur à une droite passe une droite parallèle et une seule. Euclide et ses émules nous ont-ils donc délivrés de l'équivoque ? Examinons la question.

Homonymes

Les postulats d'Euclide sont de nature assez différente : les quatre premiers ne sont que le mode d'emploi des outils de la géométrie élémentaire : règle, compas et équerre. Le cinquième est un énoncé intuitif à première vue, vrai dans la géométrie euclidienne que nous apprenions au collège mais qui n'est pas immédiatement vérifiable. Pendant plus de vingt siècles, les géomètres se sont efforcés de déduire le cinquième postulat des quatre premiers, jusqu'à ce que Gauss, puis Lobachevsky et Bolyai comprennent que c'était impossible, en construisant des modèles de la géométrie où les quatre premiers sont satisfaits mais pas le cinquième : l'hyperbolique où existent une infinité de parallèles, la riemannienne où il n'y en a pas. Le sens des mots *droite*, *point*, *cercle* formulés dans les quatre premiers postulats est donc ambigu ! En effet, nous avons appelé *droite* un objet de la géométrie, bien déterminé dans la *syntaxe* euclidienne, mais voici que la *sémantique* nous expose à l'homonymie : le mot *droite* possède diverses interprétations dans les modèles de la géométrie des quatre premiers postulats. Shakespeare fait dire à Juliette qu'une rose peut bien changer de nom sans changer de parfum. Nous sommes ici dans la situation inverse : la rose ne change pas de nom, c'est le parfum qui change.

Appelons *modèle* une structure dont un langage formel a l'étude pour contenu. C'est donc un domaine où vit un langage formel et dont les éléments permettent de donner un sens aux énoncés de ce langage. Par exemple, nous disposons depuis le début du dix-huitième siècle de trois modèles de la géométrie : euclidien, hyperbolique et riemannien. Nous y sommes désormais habitués, et on ne se demande plus quelle est la *vraie* géométrie, d'autant que les modèles non euclidiens se sont révélés très utiles pour la physique et la cosmologie. Mais il y a plus troublant : nous disposons maintenant de différents modèles de l'arithmétique. En d'autres termes, les axiomes de Peano, très simples et qu'on pourrait considérer comme le mode d'emploi d'un calculateur (machine de Turing ou ordinateur) admettent différents modèles : les entiers intuitifs, les *vrais entiers* peut-on dire – le choix de ces termes est significatif – et d'autres moins intuitifs mais qui restent formellement corrects. Cette multiplicité des modèles est l'expression des découvertes de Kurt Gödel, qui a montré l'existence d'énoncés de l'arithmétique indécidables, c'est-à-dire qu'on ne peut démontrer ni l'énoncé ni sa négation.

Un analogue géométrique en est la propriété « la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits » qui n'est pas démontrable sans le cinquième postulat, et qui est donc indécidable à partir des quatre premiers. Cette indécidabilité, qui ne fait qu'empirer si l'on ajoute des axiomes (comme Gödel l'a également montré), est dans la nature des choses : nous croyons savoir sans ambiguité ce qu'est un nombre entier, mais c'est une illusion. Laissons le mot de la fin à Jorge Luis Borges, qui écrit dans « La bibliothèque de Babel » : « Un nombre n de langages possibles se sert du même vocabulaire : dans tel ou tel lexique, le symbole *Bibliothèque* recevra la définition correcte *système universel et permanent de galeries hexagonales*, mais *Bibliothèque* signifiera *pain* ou *pyramide* ou tout autre chose, les sept mots de la définition ayant un autre sens. » Notre pauvre langue ne dispose que d'un nombre fini de signes, quand les mathématiques nous confrontent à l'infini. Comment donc échapper à l'homonymie ?

Gilles Godefroy
CNRS, IMJ-PRG et UPMC-Sorbonne Universités

Les mathématiques contre le langage (tout contre)

CATHERINE GOLDSTEIN

Les mathématiques sont souvent perçues, presque banalement, comme un langage, plus précis et mieux adapté pour décrire le monde extérieur. C'est peut-être négliger trop vite que la réflexion sur la langue, puis les sciences du langage, se sont développées en même temps que les mathématiques et que sur la longue durée objets des mathématiques et langages ont relevé de disciplines affirmées, parfois imbriquées, parfois concurrentes : les unes ont voulu rendre compte des mathématiques comme langage particulier à partir de leurs outils propres, les autres ont affirmé à divers moments leur vocation à mathématiser toutes sortes de faits de langage, les deux domaines affirmant à l'occasion, et chacun pour soi, une vocation universaliste [1]. Ces rapports ont touché jusqu'à l'élaboration conceptuelle : le nombre abstrait s'élabore dans l'écriture lorsque sa représentation se démarque, au sens propre, des signes désignant les biens concrets et les mots du langage ordinaire [5]. Des sept arts libéraux hérités du Moyen Âge, trois (la grammaire, la dialectique et la rhétorique) sont consacrés au langage, quatre (l'arithmétique, la géométrie, la musique et l'astronomie) forment les sciences mathématiques : or, c'est dans le cadre d'un mouvement de réforme de la dialectique que l'algèbre symbolique s'instaure en France à la Renaissance [2]. « L'algèbre », écrit ainsi Jacques Peletier du Mans, « apprend à discourir, et à chercher tous les points nécessaires pour résoudre une difficulté » : la question, point fort de la structuration du discours, devient équation. Ces interactions fortes sont alors soutenues par l'identité des auteurs : Peletier écrit une algèbre, mais aussi une réforme de l'orthographe, Simon Stevin, une *Dialectique* à côté d'une arithmétique et d'une algèbre, Marin Mersenne associe sons, lettres et nombres dans les exercices de l'*Harmonie universelle* et plus tard Gottfried Leibniz, Nicolas de Condorcet, ou Johann Heinrich Lambert, parmi d'autres, écriront tant des textes de mathématiques appliquées que des textes sur l'art et la logique des signes. C'est d'ailleurs explicitement comme un nouveau langage que Condorcet cherche à inventer les mathématiques combinatoires qui pourraient rendre compte du mouvement d'une navette mécanique au 18e siècle [2].

D'autres témoignages mettent en lumière des évolutions parallèles des problématiques, plus qu'un projet commun ou imbriqué [4]. Les transformations prennent ainsi une place croissante tant dans les mathématiques du 19$^{\mathrm{e}}$ siècle que dans la linguistique contemporaine naissante : le philologue Eugène Burnouf, « à mesure qu'un mot se rencontre, [...] le suit [...] dans ses transformations, notant à chaque pas les règles en vertu desquelles s'opèrent les changements de lettres ». Ce rapprochement ne passe d'ailleurs pas inaperçu : Charles Hermite, nous dit ainsi son collègue Gaston Darboux, « aimait à étudier le mécanisme grammatical et y trouvait le même plaisir que dans une transformation algébrique » [3]. Un tel parallélisme de développement, bien plus connu, s'observe aussi dans les avatars du structuralisme, de Roman Jakobson ou Louis Hjelmslev du côté de l'analyse du langage à Bourbaki du côté des mathématiques, quelques décennies plus tard.

Prendre en compte le développement disciplinaire des domaines tant linguistiques que mathématiques s'avère crucial pour restituer dans leur richesse historique et conceptuelle les frôlements, les entrelacs, les applications réciproques entre mathématiques et langage.

Références

[1] J.-P. Benzecri, « Linguistique et mathématique », *Revue philosophique de la France et de l'étranger* 156 (1966), p. 309-374.

[2] G. Cifoletti, éd., *The Art of Thinking Mathematically*, numéro thématique de *Early Science and Medicine* 11-4 (2006), p. 369-477.

[3] F. Lê et A.-S. Paumier, dir., *La classification comme pratique scientifique*, numéro thématique des *Cahiers François Viète*, sér. III, 1 (2016).

[4] C. Retoré, *Logique mathématique et linguistique formelle*, ⟨hal-00607693⟩ *in* G. Sénizergues, *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, Cassini (2013), 24 p.

[5] J. Ritter, « Les nombres et l'écriture », in Y. Michaud, dir., *Université de tous les savoirs, vol. 4 : Qu'est-ce que l'Univers ?*, Paris : Odile Jacob (2001), p. 114-129.

CATHERINE GOLDSTEIN
Histoire des sciences mathématiques
Institut de mathématiques de Jussieu–Paris Rive gauche

Un langage nécessaire pour raisonner et prouver en mathématiques

DENISE GRENIER

L'expression de la pensée mathématique nécessite un langage spécifique : des mots portant des significations précises sont indispensables pour désigner et définir les concepts utiles. Ces mots sont créés pour un usage mathématique technique, mais ce sont souvent des mots issus de la langue naturelle, éventuellement porteurs d'une autre signification courante. Dès le cycle 4, deux objectifs ambitieux sont annoncés (repris tout au long de l'enseignement secondaire) : « comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématique, scientifique et informatique ». Au lycée, la logique mathématique est un enjeu d'apprentissage central. Il s'agit en particulier de « distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant » et de « distinguer implication mathématique et causalité ». Cela ne va pas de soi, car les significations de ces termes en mathématiques peuvent différer de manière subtile de ceux de la langue naturelle. Il en est ainsi des notions logiques de proposition, connecteur (ET, OU, NON, SI... ALORS), variable et quantificateur. Ainsi, toute phrase n'est pas une proposition mathématique, on doit pouvoir décider si elle est vraie ou fausse ; le « ou », exclusif dans la langue naturelle, est inclusif en mathématiques ; le « et » et le « ou » mathématiques n'expriment ni temporalité ni causalité, le connecteur « si .. alors » est une implication stricte, pas une équivalence ; un contre-exemple à une affirmation n'est pas « un exemple qui confirme la règle » ! La phrase « si tu manges ta soupe, alors tu auras un dessert » montre bien ces différences de significations : l'interprétation naturelle par le père et l'enfant de cette phrase conditionnelle est plutôt « seulement si », ce n'est pas le sens qui lui est attribué en mathématiques, et cette phrase n'est pas contraposable.

Depuis plusieurs années, des recherches approfondies se sont penchées sur ces questions (thèses en didactique des maths, travaux du groupe « Logique » de la commission nationale inter-IREM lycée), afin de construire un « savoir de référence » pour l'enseignement de la logique, du primaire à l'université. Il est cependant important de noter qu'au delà de la manipulation correcte d'un langage formel, la compréhension du « sens mathématique » sous-jacent est un enjeu crucial.

DENISE GRENIER
Institut Fourier – Université Grenoble Alpes

Mathématiques, pratiques langagières et enseignement des mathématiques

Christophe Hache

Nous – enseignants, chercheurs, inspecteurs, etc. – sommes très attentifs aux contenus à enseigner en cours de mathématiques : quels objets mathématiques les élèves doivent-ils rencontrer ? Quels résultats ou outils doivent-ils savoir utiliser ? Quelle preuve peut-on apporter des théorèmes énoncés ? Les objets mathématiques sont essentiellement manipulés au travers du langage. Les élèves découvrent en même temps ces objets, leurs propriétés, et la façon d'en parler. Ces pratiques langagières sont cependant rarement étudiées, ou même explicitées. Peut-être parce que pour nous-mêmes les choses sont naturalisées et restent souvent implicites. En énonçant une propriété, se rend-on par exemple compte de la difficulté à comprendre « les côtés sont deux à deux parallèles » ? (et de la différence de sens avec « les nombres sont deux à deux distincts » ?), ou des quantifications exprimées par « un nombre pair s'écrit sous la forme $2n$ avec n entier », etc.

Il y a là matière à réflexion, pour les mathématiciens et pour les enseignants au moins. Mais sans doute serait-il intéressant que les élèves et les étudiants aient un regard réflexif sur les formulations qu'on leur propose pour les définitions et propriétés de leurs cours, sur les formulations des preuves qu'on leur présente ou qu'on leur demande de produire.

Le travail sur le langage est par ailleurs un levier d'apprentissage puissant : on ne pense pas, on n'apprend pas sans langage. Apprendre les mathématiques ne consiste pas à apprendre à dire des mathématiques, mais s'approprier les pratiques langagières spécifiques de la discipline et les travailler est nécessaire et permet d'accompagner l'apprentissage, d'approfondir la connaissance des objets mathématiques et de leurs propriétés. Les élèves doivent entrer progressivement dans une utilisation plus formelle de la langue, ou dans l'usage de symboles. Il est possible de trouver des activités permettant des écrits intermédiaires, les aidant à prendre petit à petit une posture d'auteur et de lecteur de textes mathématiques, ou de phrases mathématiques.

Les narrations de recherche, les bilans de savoir, le travail sur le lexique ou la confection d'un dictionnaire de la classe de mathématiques, sont sans doute connus et permettent, entre autres, un travail progressif sur la langue.

Mais on peut aussi mettre en place des moments de travail de (re)formulation de définitions ou de propriétés du cours, de démonstrations liées à la résolution d'un exercice : écriture individuelle ou collective, relecture et amélioration, débat dans la classe avec l'enseignant sur les choix de formulation, sur les incompréhensions, les ambiguïtés, etc. (voir les travaux du groupe « Léo » de l'IREM de Paris). On peut aussi donner une place plus forte au travail oral, en permettant par exemple aux élèves d'écouter un énoncé (sur un enregistrement numérique), ou d'enregistrer une réponse à un exercice (voir les travaux de l'IREM de Besançon).

Le travail sur les formulations et les pratiques langagières en mathématiques permet une nouvelle entrée sur l'apprentissage des mathématiques elles-mêmes. Pourquoi s'en priver ?

Références

« Mathématiques et maîtrise de la langue », document d'accompagnement des programmes de mathématiques du cycle 4, 2016,
`http://tinyurl.com/MEN-math-langue`

« Ressources autour des questions liées au langage dans l'enseignement des mathématiques », groupe « Léo » de l'IREM de Paris,
`http://tinyurl.com/IREM-Paris-langage`

CHRISTOPHE HACHE
IMJ-PRG et Université Paris-Diderot

Analyse textuelle, ou comment la statistique décortique des œuvres littéraires

François Husson

Est-il possible, à partir des œuvres de plusieurs écrivains, de retrouver les courants de pensées ou les genres littéraires auxquels ils appartiennent ? Dit autrement, peut-on regrouper les auteurs qui s'intéressent aux mêmes sujets, aux mêmes thématiques ? Une possibilité est bien sûr de faire ce que l'on a appris en cours de français et de lire l'ensemble des œuvres littéraires avant de les comparer pour faire ressortir des groupes d'auteurs d'un même courant ou d'un même genre. Mais comment faire si l'on doit trier 18 auteurs à partir de leurs 317 œuvres ?

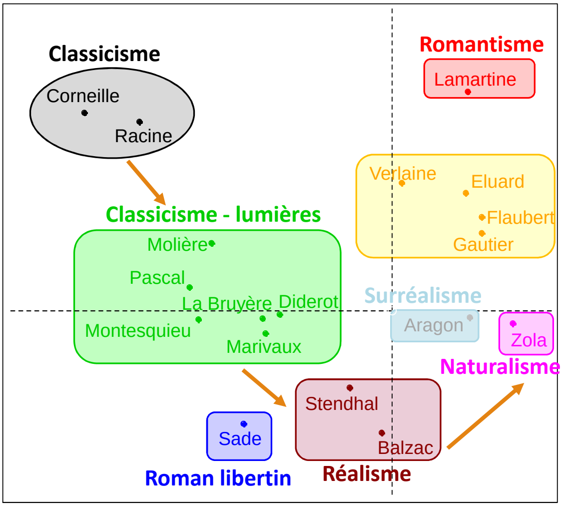
Et si l'on faisait appel aux mathématiques ou plus exactement à la statistique ? Au premier abord, on peut se demander ce que vient faire la statistique ici puisque l'on ne dispose que des auteurs et de leurs œuvres littéraires, et donc pas du moindre nombre !

Cependant, grâce à des logiciels et aux œuvres au format numérique, on peut compter, pour chaque auteur, le nombre d'occurrences de chaque mot de la langue française. On obtient ainsi un tableau croisant les auteurs et les mots (et dans une case le nombre de fois où tel mot est employé par tel auteur). L'idée est alors de considérer que les auteurs qui emploient les mêmes mots dans des proportions similaires s'intéressent aux mêmes sujets et ont les mêmes préoccupations.

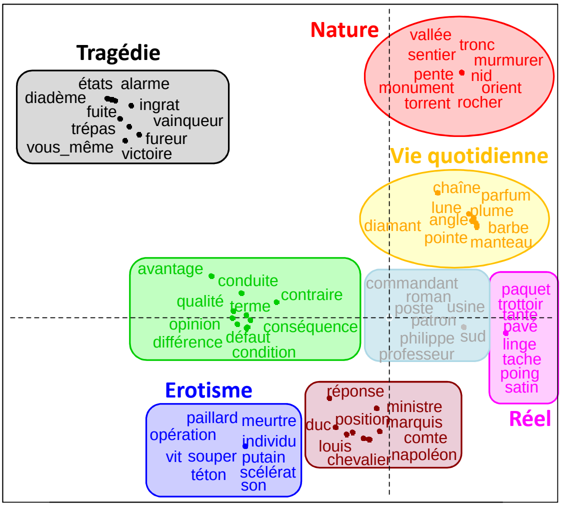
	accord	**affaire**	**âge**	**…**
Aragon	264	1029	545	…
Balzac	0	2040	629	…
Corneille	88	74	92	…
Diderot	44	154	108	…
…	…	…	…	…

À partir de ce principe simple et du tableau ci-dessus, la statistique propose une méthode de visualisation des données pour faire l'analyse textuelle. Les auteurs sont alors positionnés sur un plan (cf. figure ci-dessous) de sorte que deux auteurs qui emploient globalement les mots dans des proportions équivalentes sont proches tandis qu'ils sont éloignés si au contraire ils emploient des mots très différents.

Ainsi Corneille et Racine sont proches et ils sont très différents (car très éloignés) de Zola. En effet, Corneille et Racine sont deux auteurs particulièrement classiques du XVII^{e} tandis que Zola est un naturaliste du XIX^{e}. Stendhal et Balzac, des réalistes, sont très éloignés de Lamartine qui est un romantique. On retrouve ici que les auteurs réalistes ont un point commun : s'éloigner des excès romantiques ! On détecte ainsi une évolution du vocabulaire choisi selon les auteurs, mais aussi selon les siècles et les courants littéraires.



Une fois les auteurs placés, aidons-nous des mots qu'ils emploient plus fréquemment que les autres auteurs pour connaître leurs sujets de prédilection. Les mots peuvent être placés sur le même plan que les auteurs, mais par souci de lisibilité, ils sont ici reproduits sur un nouveau plan. Le code couleur utilisé est le même dans les deux plans, ainsi on peut voir que Corneille et Racine sur-emploient des mots comme *états, alarme, ingrat, vainqueur, victoire,* qui sont des mots relatifs aux tragédies qu'ils écrivent. Zola est quant à lui ancré dans le réel puisqu'il utilise des mots comme *linge, poing, satin, trottoir*. Lamartine, le romantique, utilise beaucoup de termes évoquant la nature : *vallée, roc, sentier, rocher, torrent,*



etc. On retrouve ainsi les particularités des thèmes qui caractérisent chaque courant.

Notons bien que l'analyse réalisée ci-dessus est automatique et que les plans sont construits uniquement à partir du tableau d'occurrences, sans utiliser à aucun moment le sens des mots. Ainsi, on aurait pu aussi facilement travailler sur des œuvres littéraires allemandes et comparer les œuvres de Goethe, Kant, Nietzsche et autres… sans avoir jamais appris le moindre mot d'allemand !

La technique présentée ici permet au linguiste d'aborder des corpus de textes importants, mais elle peut aussi lui permettre d'analyser une œuvre, par exemple chapitre par chapitre ou encore personnage par personnage. C'est donc un outil avant, bien sûr, de regarder plus en détail l'analyse pour approfondir l'étude.

François Husson
Professeur de statistique à Agrocampus Ouest (Rennes)

Les mathématiques dans notre monde du XXI^{e} siècle

BERTRAND JOUVE

Le langage mathématique est à la fois une nécessité et le passeport vers un monde plein de beauté et de surprise. Mais la technicité de ce langage ne doit pas isoler les mathématicien-ne-s et les empêcher de prendre toute leur place dans l'étude des phénomènes complexes qui constituent notre monde du XXI^{e} siècle.

Autant le dire d'emblée, le monde mathématique n'est pas le monde réel. Comme la peinture artistique ou l'univers musical, il comporte un alphabet et des règles propres qui permettent la création et qui se sont affinées au cours du temps. Depuis la fin du XVI^{e}, les textes mathématiques passent d'une écriture en langue commune à une écriture de plus en plus symbolique [1] et les mathématiques actuelles ne se parlent pas mais s'écrivent. Preuve en est le combat des mathématicien-ne-s dans les universités ou laboratoires de recherche pour disposer de tableaux, en l'absence desquels ils sont incapables de communiquer ! Cette écriture mathématique est extrêmement synthétique mais elle permet d'énoncer les résultats et de présenter les démonstrations à la fois sur un volume de pages écrites qui reste raisonnable et avec la précision nécessaire à une démarche totalement formalisée. On écrira par exemple : « $\forall x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{1/x^2} = 1/|x|$ » au lieu de « la racine carrée de l'inverse du carré de tout nombre réel non nul est égale à l'inverse de la valeur absolue de ce nombre ». Les mathématicien-ne-s du monde entier comprendront le premier énoncé et seul-e-s les francophones comprendront le deuxième. Nous avons donc là un langage universel qui est un engagement au voyage et à l'échange et qui fait qu'Erdős par exemple a pu passer sa vie de mathématicien à parcourir le monde entier pour échanger avec d'autres. Mais attention, la rigueur est de mise et, comme on dit de façon usuelle, « le diable se cache dans les détails » : le résultat est faux si « la petite étoile » est oubliée, c'est-à-dire si x vaut zéro. Lorsqu'on a passé le cap de cet apprentissage, l'exercice devient jeu, il faut jouer avec l'écriture et non se laisser piéger par elle, l'utiliser pour faciliter la communication d'une idée, d'une représentation ou d'une démonstration mathématique. Même si l'énoncé mathématique explicite l'ensemble des notions, il existe quelques

« habitus » qui facilitent la lecture et dont l'utilisation par l'élève peut constituer une preuve de son entrée dans le monde des mathématiques : n désignera généralement un entier naturel, un ensemble sera plutôt désigné par une lettre majuscule...

Ce langage étant acquis et enrichi chaque jour par les mathématiciens du monde entier, la participation à la création mathématique peut commencer. Les mathématiques ne se réduisent en effet pas à un langage, aussi évolué soit-il, mais résultent d'une alchimie merveilleuse d'un langage au service d'une intuition, d'un processus d'associations d'idées et de créations de concepts qui viennent, à la manière d'un puzzle, s'insérer dans la connaissance existante [2,3]. La beauté est au rendez-vous. Il n'existe pas de tabou en mathématiques, personne ne vous empêche de supposer vraies certaines hypothèses et d'explorer ce que cela implique dans le monde mathématique. L'univers des possibles est infini et l'accès est ouvert à tous ceux qui souhaitent y entrer. Il n'y a pas de petites ou de grandes mathématiques, on ne discute pas la véracité d'un résultat mathématique, il est toujours vrai, mais on en discute la portée : il existe des résultats dont on sait que la portée est importante, d'autres dont on pense qu'elle ne l'est pas et enfin ceux pour lesquels on ne sait pas.

La puissance des mathématiques provient de leur généricité. La mathématique de l'exemple n'existe pas car un certain degré de généricité est nécessaire pour cheminer à travers les concepts. Dans un monde réel qui a l'ambition de comprendre et maîtriser son évolution, où il est demandé de prévoir toujours plus loin dans le temps, cette puissance pourrait aveugler. L'erreur serait de considérer que le monde réel est mathématique, programmer des modèles formels, leur fournir des « Big Data », et récolter en sortie une représentation du monde dans 10, 50 ou 100 ans. Les mathématiques ne sont ni des sciences expérimentales ni des sciences de l'observation et les « Big Data » ne leur fourniront pas les données dont elles manqueraient. Par contre, les mathématiques doivent s'inviter dans les dispositifs d'étude et de compréhension des phénomènes complexes qui constituent le monde d'aujourd'hui qu'elles participent à construire (développement des réseaux sociaux, croissance de bulles financières...), car elles apportent des outils et des compétences uniques, mais au côté et en dialogue avec les autres sciences. Pour cela elles ont un énorme défi à relever : dépasser la technicité de leur langage néanmoins nécessaire. C'est la condition pour qu'un échange interdisciplinaire soit possible, en particulier avec des sciences moins formalisées mais qui ont aussi leurs concepts, méthodes et outils. Le ou la mathématicien-ne doit se mettre en danger et chercher à énoncer en termes « simples » les représentations qu'il ou elle a en tête, partager le fait qu'elles font sens pour lui ou elle, dans le monde mathématique, et qu'elles peuvent aussi faire sens dans un processus interdisciplinaire de construction d'innovations pour la compréhension et l'amélioration du monde dans lequel nous vivons. C'est à cette condition que les mathématiques éviteront l'isolement. C'est à cette condition que les mathématicien-ne-s seront soutenu-e-s pour continuer à créer.

Références

[1] Serfati Michel, « Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique », *Revue d'histoire des sciences*, tome 51, n^{o} 2-3 (1998), p. 237-290.

[2] Cédric Villani, « La naissance des idées », TEDxParis 2012, https://www.youtube.com/watch?v=crM1Z-x-o_Q

[3] Carina Louart et Florence Pinaud, *C'est mathématique !*, Actes Sud Junior (2014), 112 p.

BERTRAND JOUVE
Directeur de recherche CNRS
Institut d'études des systèmes complexes de Toulouse

Nombres et figures, définitions et énoncés

JEAN-PIERRE KAHANE

« 92 + 9 = 103 » (sic) se lit de la même façon partout, cela mérite commentaire. Tout le monde connaît la définition d'une sphère, cela mérite un commentaire encore plus étendu. D'où viennent les concepts mathématiques et les termes qui les expriment ?

Compter, conter, *Zahl, erzählen, contar*.

Comptine.

Les nombres se chantent et se racontent. Je ne vais pas vous chanter la table de multiplication, mais je vais tenter de vous raconter des mathématiques.

D'abord les nombres. « Deux mille dix-sept » s'écrit en français avec seize lettres et trois trous entre les lettres, soit dix-neuf signes. Avec 2017, quatre signes, tout le monde comprend, c'est une économie d'écriture et une économie de pensée. Comme plaisanterie, j'ai proposé la formule 92 + 9 = 103. L'important est que tout le monde la comprend de la même façon, quelle que soit la langue où on la prononce. Ce n'est pas parce qu'elle est fausse que je l'ai écrite, mais parce que tout le monde voit qu'elle est fausse. L'écriture décimale est une langue universelle.

Et pourtant, il y a bien d'autres façons d'écrire les nombres, vous le savez bien : l'écriture duodécimale, à base douze, ou l'écriture binaire, à base deux, en sont des exemples. Le choix de la base dix a été celui des Chinois depuis la plus haute antiquité, et celui des savants européens depuis Simon Stevin, le concepteur des tables de logarithmes, et celui des Français depuis la Révolution et l'adoption du système métrique. La première leçon de Laplace à l'École normale de l'An III, l'ancêtre de l'École normale supérieure, est consacrée à la numération décimale et à sa comparaison avec d'autres systèmes de numération, en particulier la numération binaire. Aujourd'hui la numération binaire est essentielle en informatique et elle joue donc un rôle central dans notre existence, le numération à base douze existe encore dans certains commerces, la base soixante est utilisée dans la mesure des angles et dans la mesure des temps.

Ainsi l'universalité de la numération décimale est un phénomène historique, et nous allons voir que les mathématiques que nous pratiquons sont un résultat de l'histoire, même si elles nous apparaissent comme la révélation de vérités éternelles.

Qu'en est-il de la notion de nombre, indépendamment de leur écriture ? Il n'y a pas de réponse mathématique à cette question. On peut l'esquiver en donnant un nom, une lettre, à l'ensemble de tous des nombres entiers. Si on l'appelle $\mathbb{N}$, les nombres entiers sont les éléments de $\mathbb{N}$. Oui, mais d'où vient $\mathbb{N}$? Est-ce que $\mathbb{N}$ est un objet réel à explorer et découvrir dans un monde distinct de celui où nous vivons ? Admettons-le pour un instant. Ainsi on découvre que $\mathbb{N}$ est le siège d'opérations comme l'addition ou la multiplication, et que certaines parties de $\mathbb{N}$ méritent une exploration spécifique, je pense à l'ensemble des nombres premiers et des merveilleuses découvertes et conjectures qui les concernent.

Spontanément, les mathématiciens travaillant dans un domaine qu'ils connaissent bien sont dans cet état d'esprit, que le domaine n'est pas ce qu'après d'autres ils construisent, mais ce qu'ils explorent. Curieusement, cette attitude s'appelle le réalisme, alors qu'elle rompt avec la réalité ambiante, notre réalité de tous les jours. Mais c'est de considérer comme réels les objets de leurs études. Le monde des objets mathématiques apparaît comme un monde extérieur à l'humanité, extérieur à la caverne où Platon voit se dérouler l'existence humaine, et selon Platon seuls les philosophes et les mathématiciens ont accès à l'extérieur de la caverne. Spontanément, les mathématiciens sont platoniciens.

Mais on peut voir au contraire les abstractions mathématiques, à commencer par celle des nombres entiers, comme le résultat d'une lente élaboration à partir des connaissances et des pratiques des sociétés humaines. Ainsi $\mathbb{N}$ ne serait pas donné, mais construit au cours de l'histoire. Nous sommes moins doués que certains animaux pour reconnaître le plus et le moins, s'il y a plus d'œufs ici où là. Mais nous savons compter, et cela compense nos insuffisances, et va bien au delà. Nous savons ajouter un, et découvrir en ajoutant un qu'il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres, c'est une première vision de l'infini.

On peut théoriser cette construction et c'est l'axiomatique de Peano, la première axiomatique au sens moderne qui soit apparue en mathématiques. Dans cette optique, qui est la mienne, les objets mathématiques sont des constructions. Ce sont des constructions bien solides au point qu'on peut les croire éternelles et existant de toute éternité, mais elles sont sans cesse reprises et rebâties. Euclide est plus solide que le Parthénon, mais notre regard sur Euclide change au cours du temps, et les nombres entiers d'Euclide, et en particulier les nombres premiers d'Euclide, ont aujourd'hui un contenu bien plus riche que de son temps. La logique mathématique, qui date pour nous d'Aristote, est complètement renouvelée par l'informatique. L'image des mathématiques comme une merveilleuse construction humaine ne me paraît pas diminuer leur importance et leur valeur, au contraire.

Je vais passer aux figures géométriques, et je commence par la sphère. Suivant l'usage mathématique actuel, la sphère sera pour moi une surface et non un volume. Un ballon, une bulle de savon, le bord d'une boule de billard, sont des images familières de sphères. Et tout le monde connaît la définition d'une sphère : c'est l'ensemble des points de l'espace qui se trouvent à une distance donnée d'un point fixe, qu'on appelle le centre de la sphère. Réfléchissons un peu. On sait reconnaître une sphère en la voyant, en la tâtant, en la faisant rouler, en jouant avec. Mais qui a jamais vu le centre d'une sphère? La sphère définie à partir de son centre est une pure abstraction mathématique. C'est une merveilleuse abstraction : elle est simple et facile à comprendre, et c'est le bon point de départ pour développer la théorie de la sphère et mettre en évidence des propriétés caractéristiques en termes de distances, d'angles ou de courbure. Par exemple, de tout point de la sphère on voit un diamètre sous un angle droit, et c'est une propriété caractéristique : ou peut définir la sphère comme l'ensemble des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle droit. On pourrait prendre cela comme définition et procéder au développement de la théorie à partir de là, mais ce serait moins simple et moins naturel.

Il y a une intéressante discussion sur la sphère, le cercle et le plan entre un professeur et un élève dans la première leçon de géométrie donnée à l'École normale de l'an III, en 1794, et nous la connaissons parce que les cours et les discussions qui suivaient étaient pris en sténographie. Je vais vous en dire un mot. Le professeur est Gaspard Monge, un des grands mathématiciens de l'époque, et l'élève est Joseph Fourier, qui allait être un grand mathématicien de la génération suivante.

Ils s'appellent entre eux *citoyen Monge* et *citoyen Fourier*. Le citoyen Fourier vouvoie le citoyen Monge et celui-ci répond en tutoyant Fourier. Fourier présente une objection aux définitions données par Monge. Il est d'accord avec la définition de la sphère que j'ai donnée, à partir du centre et du rayon. Mais il critique la définition du cercle, que Monge a défini de la même façon mais comme une figure plane. Or Monge n'a pas défini le plan, et c'est ce que lui reproche Fourier en lui proposant une définition : un plan est l'ensemble des points qui se trouvent à égale distance de deux points donnés. Je vais vous citer un extrait de la réponse de Monge, qui me paraît d'intérêt général :

> « Il est vrai que, pour bien définir un certain ensemble d'objets, il faut exposer une propriété qui convienne à tous les objets du genre, et qui ne convienne qu'à eux seuls ; mais cela ne suffit pas ; il faut encore, parmi toutes ces propriétés, choisir celle qui est la plus simple et la plus facile à concevoir.... Il faut enfin que la propriété qui sert de base à la définition soit féconde et conduise de la manière la plus directe aux autres propriétés plus compliquées qu'il est important ou de découvrir ou d'enseigner. »

Simplicité et fécondité, Monge nous donne les maîtres mots d'une bonne définition.

Avant de quitter la sphère, je reviens à Platon. Lorsqu'il parle des polyèdres réguliers, comme le cube, il dit de la sphère que c'est la figure la plus semblable à elle-même. Cela a interpellé certains traducteurs, parce qu'on a l'impression que toutes les figures sont semblables à elles-mêmes. Mais l'expression utilisée par Platon a un sens profond. Les polyèdres réguliers ont des symétries, disons, des rotations autour de leur centre qui les ramènent sur eux-mêmes, et ces rotations forment un groupe. Ce groupe est différent pour le cube et chacun des autres polyèdres réguliers. Le plus riche est celui du dodécaèdre qui a douze faces. Pour la sphère, toutes les rotations la ramènent sur elle-même, elle a le maximum de symétries, c'est bien la figure la plus semblable à elle-même.

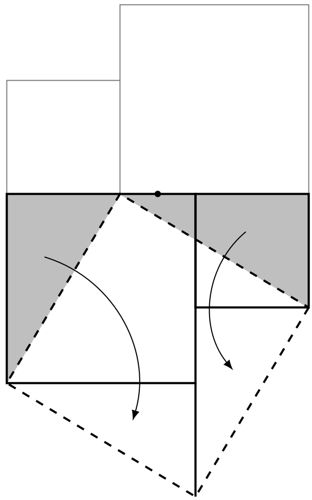
Un mot encore sur les polyèdres réguliers de Platon. Il y en a cinq, et les éléments fondamentaux de la chimie de Platon sont le feu, l'air, l'eau et la terre. Le feu est représenté par le tétraèdre, qui a quatre faces, l'air par l'octaèdre qui en a 8, l'eau par l'icosaèdre qui en a 20, et toutes ces faces sont des triangles équilatéraux ; reste la terre qui est représentée par le cube qui a 6 faces, des faces carrées et non triangulaires. La chimie de Platon est la transformation de ces polyèdres les uns dans les autres. Oui, mais il reste un polyèdre qui ne représente rien, c'est le dodécaèdre. Au contraire, Platon lui donne un rôle supérieur ; c'est lui qui a servi de modèle à l'Univers. l'interprétation est claire : l'univers est sphérique, et le dodécaèdre est un bon modèle pour la sphère. Comment voit-on que c'est un bon modèle ? tout simplement en regardant un ballon de football tel qu'on en fabriquait dans mon enfance : douze pièces pentagonales, cousues, et gonflées à l'intérieur. Et c'est bien ainsi que Socrate décrit la Terre, juste avant sa mort. D'abord il explique qu'elle est sphérique. Puis, voici la façon dont elle apparaitrait, vue du ciel : « pour ce qui est de l'aspect qu'offrirait cette terre, si on la regardait d'en haut, ce serait à peu près celui d'un ballon bigarré, dans le genre des balles à douze pièces ».

À Athènes à cette époque, les artisans du cuir devaient fabriquer des ballons tout à fait semblables à nos ballons de football. Et avant de devenir des objets mathématiques, les dodécaèdres devaient être bien visibles par les enfants jouant avec ces ballons.

Je quitte Platon, mais pas encore les polyèdres et la sphère. On peut construire la sphère à l'aide de douze pièces pentagonales, c'est ce que nous venons de voir. Mais si, au lieu de 12 pentagones, on utilise 12 pentagones et 20 hexagones, on obtient une sphère plus proche encore de sa définition mathématique. C'est ce qu'a fait l'architecte Fuller en construisant un immense dôme à l'exposition universelle de Montréal en 1966, et depuis on appelle fullerène une pareille construction. Or on a découvert dans le cosmos, puis construit en laboratoire, des molécules de carbone ayant la forme d'un fullerène. Ces molécules sont formées de 60 noyaux de carbone occupant les sommets d'un fullerène, et elles sont de grand intérêt en chimie. Ainsi la chimie moderne rejoint les visions fantastiques de Platon sur la constitution de l'univers.

À l'École normale de l'an III et en réponse à l'élève Joseph Fourier, Gaspard Monge a insisté sur deux exigences pour avoir une bonne définition : elle doit être simple, facile à énoncer, et efficace, elle doit être un bon point de départ pour établir la théorie. Et en effet, dans un cours de mathématiques, on commence par les définitions pour développer la théorie. La définition est le point de départ. Mais, historiquement, c'est un aboutissement. Selon moi, les notions mathématiques ne viennent pas d'un monde où il s'agirait de les découvrir, mais d'un effort pour rendre simples, généraux et intelligibles les résultats accumulés par des générations. Mon exemple favori est une phrase de trois mots qui exprime un résultat profond. Certains d'entre vous la rencontreront plus tard, mais il n'est pas nécessaire de comprendre son sens pour saisir d'où elle vient. La voici : « L^2 est complet ». D'où vient elle ? D'une proposition établie indépendamment par deux mathématiciens au début du XX^e siècle, qui leur servait à résoudre un problème important sur les séries de Fourier, et qui était très longue à énoncer et très subtile à l'époque. Quelques années plus tard, on a défini l'espace de Lebesgue L^2, et le terme de complet. Toute la difficulté et la subtilité de la proposition sont passées dans les définitions. Avec de bonnes définitions, on a de bons énoncés.

Mais la simplicité des définitions et des énoncés est trompeuse. Elle résulte d'un travail de distillation, ou de sublimation, de tout ce qu'ont apporté les mathématiciens, et aussi bien d'autres, au cours des siècles. Aussi il faut prendre les définitions comme des élixirs de pensée, et prendre le temps de les assimiler en découvrant leurs conséquences dans les mathématiques qu'elles entraînent. Historiquement, c'est une partie de ces conséquences qui a engendré les points de départ des théories. Dans l'enseignement, on inverse l'ordre historique, c'est ce que les didacticiens appellent la transposition didactique. Si on reste à la définition, la richesse de la notion est cachée.



Ce peut être le moment de démontrer un théorème que vous connaissez : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. C'est la façon dont Clairaut l'enseignait à la marquise du Châtelet. On part de deux carrés égaux et adjacents, on trace deux diagonales faisant un angle droit, on les complète pour former un carré ; la surface de ce carré est la somme des surfaces des deux carrés de départ. C'est la démonstration du théorème de Pythagore dans le cas d'un triangle rectangle isocèle, et elle était classique au temps de Platon. La suite s'exprime mieux par des figures que par des mots, mais j'essaye ici d'en donner l'idée. Au lieu de deux carrés adjacents et égaux, ou les prend inégaux, avec les deux côtés horizontaux supérieurs en prolongement l'un de l'autre ; on prend leurs symétriques par rapport au centre du segment qui réunit ces deux côtés ; le symétrique du grand côté et le côté extérieur du petit carré forment un angle droit, ce sont les côtés du triangle à considérer ; en le faisant tourner d'un angle droit autour du sommet le plus bas de son hypoténuse on obtient un nouveau triangle par lequel on le remplace ; puis on opère de même avec le triangle rectangle construit sur le côté vertical extérieur du grand carré et sur le symétrique déjà construit du petit côté ; après les remplacements la réunion des deux carrés de départ devient un carré construit sur l'hypoténuse ; ainsi le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

J'ai écrit cette démonstration avec des mots du langage mathématique courant, mais elle est plus compréhensible en faisant des figures et des constructions. Dans le langage mathématique il me paraît convenable d'inclure les figures.

Les figures sont comme des signes, ou des mots, et les constructions géométriques sont comme des phrases construites avec ces mots. Elles parlent à l'imagination, ce qui est essentiel en mathématiques. Si l'on n'y prend pas garde, elles provoquent aussi des erreurs, et la correction des erreurs fait aussi partie de la vie mathématique.

Les triangles rectangles constituent une mine de constructions intéressantes. À l'aide de leur hauteur on peut les décomposer en deux triangles qui leur sont semblables. En répétant cette opération indéfiniment et en numérotant convenablement les triangles emboités qu'on obtient ainsi, on a finalement une courbe qui remplit tout le triangle rectangle. l'exploration de cette courbe est une bonne initiation à la géométrie fractale.

La courbe que je viens de décrire n'a de tangente en aucun point. c'est l'un des objets étranges que des mathématiciens ont construit à la fin du XIX^{e} siècle. Le premier a été une fonction continue qui n'avait de dérivée en aucun point. À l'époque ces constructions n'avaient pas bonne réputation. Charles Hermite, le plus grand mathématicien français de sa génération, disait, je cite : « je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable que sont les fonctions continues qui n'ont point de dérivées ». Il disait cela sérieusement, et les plus grands mathématiciens étaient de son avis. Et cependant, de pareils monstres commençaient à apparaître dans les mathématiques classiques. Plus clairement encore, ils sont apparus au début du XX^{e} siècle avec les probabilités et les fonctions représentant des processus aléatoires. Le mouvement brownien donnait un exemple d'un phénomène physique, le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide, qui était valablement représenté par une fonction continue nulle part dérivable, et par une courbe n'admettant de tangente en aucun point. Dès qu'on a étudié de façon systématique les processus aléatoires, de pareilles fonctions et courbes apparaissaient en nombre. Fallait-il, pour une courbe qui remplissait un carré, dire qu'elle était de dimension 2 et non de dimension 1 ? Oui, et la théorie a été faite de dimensions intermédiaires entre 1 et 2, et de façon générale de dimensions qui étaient des nombres réels positifs non nécessairement entiers. Elle date de 1919, elle est due à une grand mathématicien allemand, Felix Hausdorff, et elle joue un rôle fondamental dans ce qui allait devenir la géométrie fractale.

La géométrie fractale a complètement changé notre vue des objets mathématiques qu'on avait considérés comme des monstres, et des objets de la nature dont on n'avait pas entrepris l'étude mathématique. Elle est due à Benoît Mandelbrot, et date des années 1960. Benoît Mandelbrot était né en Pologne et il est mort aux États-Unis. Mais sa formation a été faite en France, il a été et est resté français, et j'insisterai sur l'importance du français comme langue dans les mathématiques qu'il a créées.

D'abord le terme de fractale. Il s'est introduit en plusieurs étapes. La première a été de parler de dimension fractale au lieu de dimension de Hausdorff, qu'on appelait alors couramment dimension fractionnaire. C'était une innovation modeste, et qui n'avait pas de quoi impressionner les mathématiciens. L'étape décisive a été la publication en 1975 du livre *Les objets fractals*. Le titre complet est *Les objets fractals : formes, hasard et dimension*. On voit tout de suite le rapport à la géométrie et aux probabilités. La traduction anglaise est venue en 1977, et le titre a été condensé sous la forme : *Fractals : forms, chance, and dimension*. Enfin est apparu en français le substantif féminin, « les fractales », avec comme compagnon l'adjectif fractal. Par exemple, Mandelbrot parle de « la géométrie fractale de la nature ». Cette expression est parlante et rend bien compte d'observations éparses faites précédemment sur les côtes de Bretagne ou le cours de la Vistule. Les bizarreries mathématiques deviennent des pièces d'une véritable théorie.

L'apport de Benoît Mandelbrot aux mathématiques est aujourd'hui unanimement reconnu. Il tient à une vision d'ensemble qui lui était personnelle, et aussi, je veux y insister ici, à l'usage de la langue et à ses inventions verbales. Voici un exemple personnel que j'ai vécu. Avec Raphaël Salem, j'avais étudié des objets et des courbes étranges ; l'une de ces courbes représentait ce que nous appelions « la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble triadique de Cantor ». Bien sûr, cela ne dit rien à personne hors quelques mathématiciens. Mais Benoît Mandelbrot l'appelle « l'escalier du diable », c'est une trouvaille verbale, qui attire tout de suite l'attention. De la même façon, « le flocon de neige » est bien plus attirant que « la courbe de Von Koch ». Je ne vais pas multiplier les exemples, il suffit de lire du Mandelbrot pour avoir conscience d'un véritable génie verbal.

Et son influence à cet égard s'est étendue à certains de ceux qui ont travaillé sur des objets mathématiques qu'il a créés. Le plus célèbre de ces objets est l'ensemble de Mandelbrot. Pour ce que je vais en dire, il n'est pas nécessaire de connaître sa définition ; je la donne quand même, à l'intention des professeurs sinon des élèves. C'est une partie du plan des nombres complexes, constituée des points c tels que la fonction z^2+c, appliquée successivement à 0 puis à l'image de 0 qui est c, puis à l'image de c et ainsi de suite indéfiniment, donne une suite de points qui reste à distance finie de 0. C'est un exercice qui vous est accessible de voir à quoi ressemble l'ensemble des ces points c situés sur la droite réelle. Mais l'ensemble des points c complexes a été et est toujours l'objet d'études difficiles. Mandelbrot en a donné des images qui se sont affinées au cours du temps, par informatique graphique. Celui qui a élucidé les propriétés essentielles, à savoir si l'ensemble était ou non d'un seul tenant, est un mathématicien français, Adrien Douady, qui était mon collègue à Orsay. Lui aussi avait un génie de la langue, et ses trouvailles sont restées seulement dans la mémoire de ses interlocuteurs. Au début, l'ensemble de Mandelbrot était figuré par une belle partie centrale, ornée de bosses à la manière d'un flocon de neige, et de petits morceaux épars. Pour Douady, ces morceaux épars étaient « les crottes de mouche de Mandelbrot ». Mais l'étude théorique, et d'ailleurs les dessins plus élaborés, montraient l'existence de fils reliant ces petits morceaux, qui cessaient donc d'être épars. Alors, pour Douady, ce sont devenus « des gouttes de rosée sur une toile d'araignée ».

Je conclus là-dessus : il y a une poésie des mathématiques comme il y a une poésie de la nature. Et le langage mathématique, si on y regarde bien, enferme dans sa spécificité bien des éléments poétiques.

Texte préparé pour une conférence à l'Académie des sciences pour la Semaine des mathématiques 2017, action proposée par l'Académie de Paris.

JEAN-PIERRE KAHANE
Professeur émérite à l'Université Paris Sud, Orsay
Membre de l'Académie des sciences

Word n'est pas une fatalité !

Hervé Le Dret

On rencontre encore souvent, même de nos jours, de nombreux documents ayant du contenu mathématique qui ont été préparés avec Word. À titre personnel, je n'ai jamais réussi à établir une bonne relation avec Word : paragraphes qui passent en gras sans crier gare, listes à puces obstinées dont on ne sort qu'en cliquant aléatoirement, documents Word certifiés provenant de l'administration qui ne s'ouvrent qu'au bout d'un certain temps sur une page blanche remplie d'ondulations rouges [11], ou bien qu'il est impossible d'éditer correctement pour une raison ou pour une autre. Et tout cela, même sans contenu mathématique.

À tous ces maux, il existe un remède. Ce remède est là depuis de nombreuses années, mais peut-être traîne-t-il encore une réputation d'ésotérisme qui n'est vraiment plus méritée aujourd'hui, il s'agit bien sûr de LaTeX. LaTeX n'est pas un traitement de texte à la Word, c'est beaucoup plus. En particulier, c'est aussi un langage (de programmation), ce qui justifie marginalement que l'on en parle ici, même si le but de ces quelques lignes est justement de tenter de convaincre que l'on peut l'utiliser presque comme un traitement de texte, mais avec un confort d'usage, une stabilité et une qualité typographique sans commune mesure avec ce que les traitements de texte ordinaires peuvent offrir.

Ainsi par exemple, le fragment de texte qui contient une note de bas de page deux paragraphes plus haut a été tapé simplement

```
d'ondulations rouges\footnote{Sur Mac, certes, document que
l'on peut en général ouvrir aussi avec LibreOffice, mais
alors la mise en page peut être subtilement différente.}, ou
bien qu'il est impossible
```

Pour ce qui concerne les mathématiques, une jolie formule [12] comme $e^{i\pi} = -1$ se tape simplement `$e^{i\pi}=-1$`. Une formule un peu plus

11. Sur Mac, certes, document que l'on peut en général ouvrir aussi avec LibreOffice, mais alors la mise en page peut être subtilement différente.

12. Attention, elle contient plusieurs éléments susceptibles de hérisser certains spécialistes, comme le « e » et le « i » en italique ou l'usage du `$` pour introduire le mode mathématique. On ne se refait pas.

complexe comme

$$J_\alpha(x)=\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}{\Bigl({\frac{x}{2}}\Bigr)}^{2m+\alpha}.$$

s'obtient avec

```
$$J_\alpha(x)=\sum_{m=0}^\infty
\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}
{\Bigl({\frac{x}{2}}\Bigr)}^{2m+\alpha}.$$
```

qui se comprend presque dans le LaTeXte.

L'apprentissage de LaTeX n'est certes pas anodin, mais la quantité phénoménale de ressources que l'on peut trouver sur le Web à son propos facilite grandement la tâche. L'investissement initial est en fait vite amorti et l'on peut assez rapidement produire aisément des textes mathématiques d'une grande sophistication. Parmi bien d'autres ressources, le wikilivre

`https://fr.wikibooks.org/wiki/LaTeX`

permet non seulement de démarrer en LaTeX, mais peut aussi servir de référence quand on a oublié tel ou tel détail.

Bien sûr, argument très fort en sa faveur, LaTeX est gratuit. Il est maintenu par une très large communauté et son omniprésence dans le champ de la publication scientifique est la garantie de sa pérennité [13]. LaTeX est distribué pour la majorité des plate-formes informatiques. Par exemple, la distribution TexLive est mise à jour chaque année, voir le site du TeX Users Group

`http://www.tug.org/`.

La puissance de LaTeX tient aussi à la grande quantité de « packages » qui ont été développés au fil des années et qui lui ajoutent une variété énorme de fonctionnalités. Ces packages sont inclus dans les grandes distributions. Quel que soit le problème que l'on se pose, il est pratiquement certain qu'il existe un package qui le résout.

Le sujet de LaTeX remplit facilement des livres entiers, donc on ne peut guère qu'en gratter la surface ici. Mentionnons qu'il est maintenant très simple d'utiliser la typographie mathématique de LaTeX dans une page web grâce à MathJax :

13. À ce propos, LaTeX est stable. Son cœur, TeX, créé par Donald Knuth, n'évoluera pas au delà de la correction de rares bugs, son numéro de version, actuellement 3.14159265, est destiné à converger vers π. En ce qui concerne LaTeX, qui en est une surcouche, on utilise actuellement la version LaTeX 2ε et ce depuis longtemps. Un éventuel LaTeX 3 est régulièrement évoqué, mais celui-ci ne semble pas vraiment prendre forme, probablement parce que LaTeX 2ε est déjà tellement satisfaisant.

https://www.mathjax.org/.

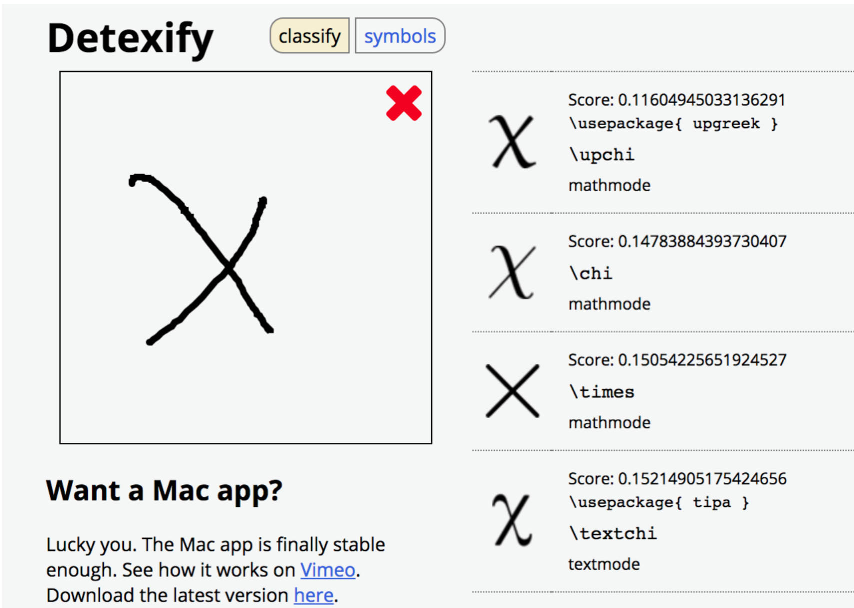
MathJax ne demande pratiquement aucune installation du côté du serveur, et absolument aucune du côté des lecteurs de la page, dans l'ordinateur desquels la composition typographique s'effectue pourtant à la volée.

Dans un autre registre, on peut créer des illustrations de très haute qualité avec LaTeX, par exemple avec le package Ti*k*Z [14]. Plusieurs logiciels de dessin, ou de géométrie dynamique comme Geogebra, sont capables de générer des exportations Ti*k*Z, ce qui permet par exemple de commencer un dessin à la main, puis de le fignoler depuis LaTeX.

Et que se passe-t-il si l'on a oublié le nom d'un symbole mathématique, car il y en a quand même beaucoup ? Eh bien, on va sur Detexify :

http://detexify.kirelabs.org/classify.html

où l'on peut dessiner le symbole recherché et obtenir la commande correspondante... ce qui est quand même assez impressionnant, surtout quand on ne dessine pas très bien.

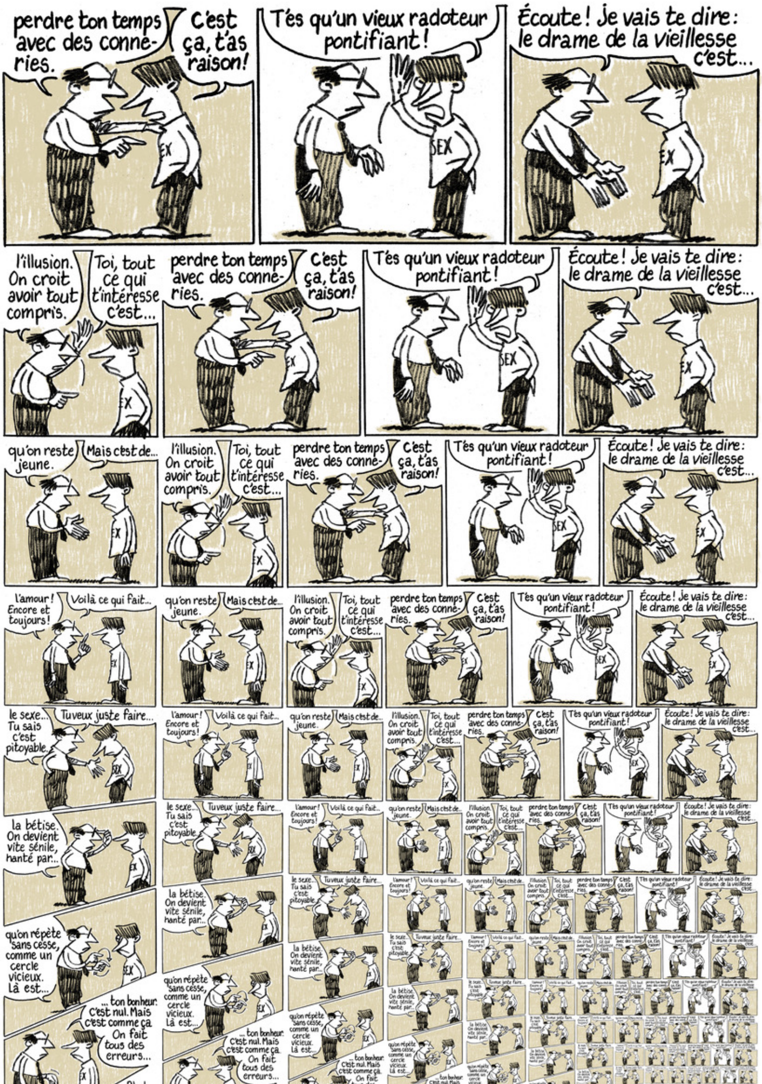


Hervé Le Dret
UPMC-Sorbonne Universités

14. Ti*k*Z ist *kein* Zeichenprogramm.

Contes & décomptes

Étienne Lécroart



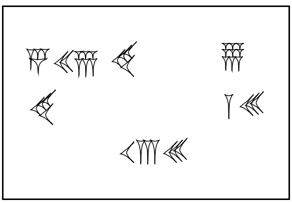
Étienne Lécroart, extrait de *Contes & décomptes*, L'Association (2012).

Diversité des ressources du langage : quelques exemples vieux de 4000 ans

CHRISTINE PROUST

Une idée largement répandue en histoire des sciences, et qui fut particulièrement prégnante au 19e siècle, est que la structure d'une langue maternelle commanderait les potentialités ou les limites de la pensée. Ainsi, certaines langues seraient incapables d'exprimer des concepts abstraits, ou des structures logiques, ou des méthodes générales [15]. Sur la base de cette idée, des historiens opposèrent les mathématiques « orientales » aux mathématiques « occidentales », ou bien les mathématiques « grecques » aux mathématiques « babyloniennes », ou même les mathématiques « sumériennes » aux mathématiques « akkadiennes ». Des recherches récentes montrent que ces vieux schémas doivent être abandonnés si on veut comprendre l'extraordinaire inventivité mathématique dont témoignent des écrits produits, depuis les débuts de l'antiquité, dans de nombreuses régions du monde, dans de nombreuses langues, sur des supports variés et dans les buts les plus divers. L'espace réduit de cette contribution ne permet pas une vue d'ensemble de la question [16]. Je vais me limiter à montrer quelques exemples d'outils linguistiques forgés pour des besoins mathématiques particuliers. Ces exemples sont puisés dans des textes mathématiques qui ont été écrits il y a quatre mille ans en Mésopotamie.

Voici le premier exemple (à gauche, une reproduction du texte cunéiforme, à droite sa transcription) :



4:26:40 9
40 1:30
13:30

15. Voir K. Chemla (éd.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, Cambridge : Cambridge University Press (2012).

16. Voir K. Chemla, « Sciences en texte ou : Des rapports entre écriture et pensée », *A3-Magazine* n^{o} 68 - été 2016 : dossier « Les mathématiciens dans tous leurs états », ⟨`http://tinyurl.com/A3-magazine-68`⟩.

Ce genre de calcul était très répandu dans les écoles de scribes à l'époque paléo-babylonienne (début du 2e millénaire avant notre ère). Il est resté énigmatique aux yeux des historiens jusqu'à ce qu'on trouve une tablette qui en fournit quelques éléments d'explication [17]. Le calcul donné ici est un exercice scolaire dont on a trouvé plusieurs exemplaires en Mésopotamie [18]. Il s'agit du calcul de l'inverse de 4:26:40 en notation sexagésimale positionnelle flottante [19]. Grâce à divers indices, on pourrait ainsi raconter cet algorithme :

> 4:26:40 se termine par le nombre régulier 6:40, donc 4:26:40 est « divisible » par 6:40. Pour diviser 4:26:40 par 6:40, on multiplie 4:26:40 par l'inverse de 6:40. L'inverse de 6:40 est 9, d'après les tables d'inverse. Ce nombre 9 est posé à droite. Le produit de 4:26:40 par 9 donne 40, donc 40 est le quotient de 4:26:40 par 6:40 ; ce nombre est posé à gauche. L'inverse de 40 est 1:30. Le nombre 1:30 est posé à droite. Pour trouver l'inverse de 4:26:40, on n'a plus qu'à multiplier les inverses des facteurs de 4:26:40, c'est-à-dire les nombres 9 et 1:30 posés à droite. Ce qui donne 13:30, l'inverse cherché [20].

D'une certaine façon, la colonne de gauche donne une factorisation du nombre à inverser (4:26:40 = 6:40 × 40), et la colonne de droite une factorisation de l'inverse cherché (9 × 1:30 = 13:30).

Dans notre texte, il n'y a aucun mot pour rendre compte de la procédure algorithmique, seulement des nombres placés selon une disposition particulière, chaque place ayant une signification mathématique précise. Les outils linguistiques utilisés ici ne sont pas ceux de la langue maternelle, mais des symboles et des positions. Le texte seul ne donne pas les clés pour comprendre la signification des positions. Le document écrit n'a de sens que dans le cadre d'une culture partagée par les scribes anciens, sous forme par exemple de savoirs communs appris dans l'enfance, ou d'explications orales, ou d'une comptine chantée. Cette culture nous échappe largement aujourd'hui. On peut cependant imaginer que le rapport de la trace écrite à

17. VAT 6505 ⟨http://cdli.ucla.edu/P254921⟩.

18. Voir par exemple les tablettes YBC 1839 ⟨http://cdli.ucla.edu/P254976⟩, Ist Ni 10241 ⟨http://cdli.ucla.edu/P368962⟩ et UM 55-21-357 ⟨http://cdli.ucla.edu/P257396⟩, dont la description et les photos sont accessibles sur la base de données du CDLI aux adresses citées.

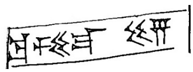
19. Voir Proust 2013, « Du calcul flottant en Mésopotamie », *La Gazette des mathématiciens*, 138, p. 23-48 ⟨http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2013/138/smf_gazette_138_23-48.pdf⟩.

20. Le lecteur désireux de vérifier les calculs est invité à utiliser la calculatrice babylonienne MesoCalc ⟨http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html⟩.

la langue maternelle pourrait être comparé avec celui d'une division posée moderne à la comptine qui guide et explique les pas du calcul.

Le deuxième exemple, tout à fait différent, montre comment des besoins mathématiques particuliers ont pu pousser des mathématiciens inventifs à créer de toutes pièces des outils linguistiques. Il s'agit encore d'un texte mathématique d'époque paléo-babylonienne. Le texte, écrit sur plusieurs tablettes numérotées, est très long. Il donne une liste de centaines « d'équations », c'est-à-dire de relations entre la longueur et la largeur d'un rectangle ; ces relations sont linéaires, quadratiques, voire de degré supérieur ; les solutions sont toujours les mêmes : la longueur est 30 et la largeur est 20. Deux tablettes contenant des portions de cette liste sont conservées au Louvre [21] à Paris.

Le 59e problème de la tablette numérotée 7 (AO 9071) est ainsi formulé :



J'ai soustrait, c'est 45.

Cet énoncé, qui semble à première vue quelque peu lacunaire, ne peut être compris que dans le contexte d'une vaste structure textuelle arborescente. Son principe est le suivant : lorsque certaines informations sont communes à des énoncés de problèmes successifs, ces informations sont fournies dans le premier énoncé du groupe, mais non répétées dans les suivants. Ce principe est appliqué à différents niveaux, tant est si bien que plus nous avançons dans le texte, plus l'information est localement lacunaire. Les éléments d'un énoncé sont ainsi dispersés dans la vaste liste des énoncés, mais de façon parfaitement planifiée, ce qui permet au lecteur expert de les retrouver. Une fois toute l'information récupérée, le texte « J'ai soustrait, c'est 45 » se révèle renvoyer à un énoncé hautement complexe, qu'on pourrait exprimer de la façon suivante en langue algébrique moderne (x représente la longueur d'un rectangle, et y sa largeur) :

21. AO 9071 ⟨`http://cdli.ucla.edu/P254392`⟩ et AO 9072 ⟨`http://cdli.ucla.edu/P416818`⟩, publiées dans Proust, « Deux nouvelles tablettes mathématiques du Louvre », *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie*, 99 (2009), p. 167-232.

$$\left\{\begin{array}{l}(3x+2y)\dfrac{1}{13}+x=40\\ -\left\{\left\langle\left\{[(x+25)+(y+1.30-x)+(x+y+35)]\dfrac{1}{11}+4x\right\}\dfrac{1}{7}+y\right\rangle\times 2\times\dfrac{1}{16}\right.\\ \qquad\left.-(x+2y)+x+y+(3x-2y)\right\}\dfrac{1}{7}+(x+y)=45\end{array}\right.$$

La structure, la syntaxe et la terminologie du texte, bien qu'originellement inspirées de celles de la langue sumérienne, sont des créations linguistiques artificielles conçues pour exprimer des relations algébriques aussi complexes que voulu. Elles permettent en particulier de représenter des hiérarchies d'opérations que, dans la langue algébrique moderne, nous représentons par des niveaux de parenthèses.

On pourrait multiplier les exemples pour montrer à quel point les ingrédients des langages utilisés en mathématiques dans le passé furent multiples. Ces ingrédients comprennent non seulement des textes écrits dans différentes langues, avec différents types de procédés linguistiques ou des mises en pages particulières, mais aussi des éléments extérieurs au texte comme des explications ou des comptines orales, des tables numériques, des abaques, des diagrammes, des symboles et sans doute d'autres, comme des gestes ou des objets.

CHRISTINE PROUST
CNRS & Université Paris Diderot

Raisonnement et langage naturel

Christian Retoré

La connexion entre mathématiques et langage est en plein renouveau, notamment en sciences cognitives, en didactique des mathématiques ou encore dans certaines applications de traitement automatique des langues, comme l'inférence textuelle (une phrase est-elle conséquence d'un texte ?) ou l'analyse automatique de l'argumentation. Ce type d'interaction entre mathématiques et langage naturel, qui est très liée à la logique, est fascinant notamment en raison de sa longévité et de sa réciprocité. D'une part, on raisonne et on fait des mathématiques dans la langue commune, en classe comme entre mathématiciens. D'autre part, les phrases ont une structure qui peut être décrite mathématiquement : arbres représentant la structure grammaticale d'une phrase, formules logiques représentant son sens, les deux structures étant intimement liées. Certains aspects de cette connexion sont étudiés depuis l'Antiquité.

Un aspect récent de cette connexion est l'étude mathématique de la structure grammaticale des phrases, les arbres syntaxiques, connue en informatique sous le nom de théorie des langages formels. Cette théorie, venue de la linguistique, sert aussi en biologie pour la génomique et en mathématiques dans la théorie des groupes : un bel exemple d'interaction entre mathématiques et linguistique.

Parlons maintenant de sémantique, c'est-à-dire du sens des énoncés en langage naturel. Le sens a lui aussi une structure mathématique, dont un aspect essentiel relève de la logique : une phrase affirme, nie, suppose – ce qui est totalement ignoré des approches statistiques basées sur la fréquence des mots, lesquelles ne peuvent identifier que les connotations et la thématique d'un texte, de ce point de vue là, « *Il est petit* » ou « *Il est grand* » sont similaires. Les propositions sont organisées entre elles suivant des relations logiques : « *ou* », « *et* », « *non* », « *si… (alors)…* ». Les quantificateurs de la langue sont plus variés que ceux des mathématiques que « pour tout » et « il existe » : « 20 %, au moins 5, peu, beaucoup, la majorité, la plupart… ».

Le sens logique d'une phrase, ou plus généralement celui d'une expression complexe, résulte de la composition des sens des expressions qui la composent, et donc *in fine* du sens des unités les plus simples, à savoir les mots. Ainsi le sens de « *les malades alités attendent un bon médecin* » s'obtient-il à partir de la structure grammaticale de la phrase, et du sens des mots qui la composent.

Le sens des mots a une nature logique connue depuis l'Antiquité. Un nom commun ou un groupe verbal est un prédicat unaire (une propriété) qui peut être vrai ou faux selon l'argument auquel il est appliqué : malade(x), médecin(x), attendre_un_bon_médecin(x). Un verbe transitif est un prédicat binaire attendre(x, y), vrai ou faux suivant les valeurs respectives de x et de y. Un adjectif comme *alité* est aussi une propriété : être un malade alité, c'est être un malade et être alité. En revanche être un bon médecin ce n'est pas être un médecin et être bon : *bon* est une propriété de propriété, qui vient modifier la propriété d'être médecin.

Les quantificateurs comme « *chaque, tous les, les, tout* » (« pour tout » en mathématiques) ou « *un, des, quelques, certains* » (« il existe » en mathématiques) sont plus complexes : à partir d'un nom commun (une propriété N) et du reste de la phrase (une autre propriété Q), un quantificateur fabrique une proposition qui est vraie ou fausse, « *les [N : malades alités] [Q : attendent le Dr. House]* », ou « *[Q : Pierre attend] un [N : bon médecin]* ». Lorsque les deux quantificateurs sont en compétition, il y a ambigüité : « *les malades alités attendent un bon médecin* » peut être compris de deux manières (*les malades alités attendent tous le même médecin, lequel est un bon médecin,* ou *chaque malade alité verra un bon médecin, pas forcément le même*). Percevoir la différence entre ces deux sens, et le cas échéant savoir reconnaître lequel convient en situation est une difficulté majeure dans l'enseignement des mathématiques. L'ambiguïté est encore plus forte et la compréhension plus difficile lorsque les quantificateurs interagissent avec la négation : « *Tous les malades n'apprécient pas les bons médecins.* » Pour pouvoir construire la ou les formules logiques associées à une phrase, il faut aussi trouver les antécédents des pronoms, et cela complique grandement la tâche : « *Pierre attendait le médecin, il dormait.* » L'élève de mathématiques doit surmonter ces difficultés linguistiques pour raisonner correctement, ce qui se fait en langage naturel, et non avec des formules.

Cette correspondance entre phrases et propositions logiques a été étudiée d'Aristote à la scholastique, puis au XX^{e}. Elle connaît aujourd'hui un vif renouveau pour l'analyse automatique de la structure des phrases, pour leur « traduction » en formules logiques qui peuvent être manipulées par un ordinateur : tel article du *Monde* entraîne-t-il ou non que « *le chômage des jeunes a baissé le mois dernier* » ? Une recherche sur Internet trouve les pages web pertinentes, peut identifier les expressions voisines dans le texte, mais elle ne répondra pas à la question posée sans intervention humaine.

La tâche appelée inférence textuelle (*text entailment*), permet de répondre directement, et elle suscite actuellement un vif intérêt.

Pour clore cette note sur le sens inverse, qui va des formules logiques aux phrases, observons que beaucoup d'élèves éprouvent des difficultés à comprendre mais aussi à formuler clairement les énoncés mathématiques, souvent riches en quantificateurs et en connecteurs logiques, et cela les gêne pour trouver et communiquer leur raisonnement. C'est pourquoi, en plus des linguistes et des logiciens, les cogniticiens et les didacticiens des mathématiques ont eux aussi beaucoup à apporter aux réflexions sur le lien entre logique (mathématique) et langage (naturel). Certains participent à notre projet e-fran AREN Argumentation et Numérique (*analyse automatique, linguistique et logique, de débats en ligne écrits réalisés par des lycéens à partir de textes scientifiques – Université de Montpellier, Académie de Montpellier, IntactileDESIGN, Mezoa, WeAreLearning*) ainsi qu'à un projet de l'université de Montpellier sur la quantification (réunissant linguistes, informaticiens, mathématiciens et didacticiens des laboratoires LIRMM, IMAG et PRAXILING).

CHRISTIAN RETORÉ
Professeur d'informatique à l'Université de Montpellier
Responsable de l'équipe Texte du Laboratoire d'informatique, de robotique et de microélectronique de Montpellier
Responsable du projet e-fran du PIA AREN Argumentation et numérique (Université de Montpellier, Académie de Montpellier, IntactileDESIGN, Mezoa, WeAreLearning)

Mathématiques et langue commune

Oliver Rey

Les mathématiciens ayant des connaissances littéraires ne sont pas rares – en tout cas beaucoup moins que les « littéraires » ayant des connaissances mathématiques. Pourquoi cette dissymétrie ?

Les « littéraires » peuvent se permettre, dans une large mesure, d'ignorer les sciences. Cette lacune dans leurs connaissances est regrettable, elle n'est pas rédhibitoire. Les mathématiciens, en revanche, doivent comme tout un chacun connaître le matériau de la littérature, à savoir la langue commune, qui est aussi la langue dans laquelle ils rédigent leurs propres travaux. Il n'y a pas, en effet, de langue mathématique à proprement parler. Certes, les notions mathématiques en appellent, pour être exprimées, à une redéfinition de certains mots du lexique courant (groupe, matrice, compact, dérivation…), exceptionnellement à l'invention de mots nouveaux (cohomologie, chtouca…) ; elles réclament aussi l'élaboration d'une écriture symbolique – qui permet, par exemple, d'écrire les équations de façon simple et univoque. Mais un texte mathématique n'est jamais entièrement composé de ces mots redéfinis et de ces symboles : ceux-ci se trouvent inclus dans un texte composé en langue usuelle. L'idée est répandue, remarque Laurent Lafforgue, « selon laquelle les mathématiques consistent en des formules. Effectivement, le langage symbolique joue un rôle ; il est devenu indispensable dans le développement de la discipline. Cependant, aujourd'hui comme hier, ces formules ne prennent un sens qu'à l'intérieur d'un texte. Un article de mathématiques est d'abord, et avant tout, un texte ; c'est un récit. […] On raconte une sorte d'histoire dans laquelle sont introduits progressivement des protagonistes qui vont interagir entre eux[22]. » On pourrait soutenir qu'en dernière analyse, tout raisonnement mathématique est susceptible d'être réduit à une suite de symboles. Mais si aucun article mathématique ne procède à une telle réduction, il y a à cela une excellente raison : cela demanderait un travail colossal, pour un résultat parfaitement vain. Car pour comprendre ce que l'article veut dire, le lecteur devrait se tuer à remettre des mots à tous les endroits d'où le rédacteur se serait tué à les chasser. On saisit, au passage, pourquoi cours, séminaires, colloques et conversations sont

22. Laurent Lafforgue, « Le latin et ma formation mathématique », in *Le Bon Air latin*, Hubert Aupetit, Adeline Desbois-Ientile et Cécilia Suzzoni (dir.), Fayard (2016), p. 229-230.

si importants au partage des idées mathématiques. Même si un article ne saurait évacuer toute narrativité, il peut néanmoins réduire celle-ci à la portion congrue, alors que la rencontre vivante oblige à la développer.

Redisons-le : il n'y a pas de langue mathématique autonome. Ce qui existe, c'est une extension mathématique de la langue commune. Et c'est dans la continuité préservée avec le fonds commun de la langue que la pensée mathématique puise son sens et sa fécondité. Les ambiguïtés de la langue usuelle qui, de prime abord, lui semblent un obstacle, sont aussi ce qui, en profondeur, ne cesse de la relancer. Aussi les mathématiques ont-elles tout à gagner à être pratiquées dans des langues de culture parlées avec aisance. Henri Poincaré en concluait que « ce n'est pas seulement à l'homme, mais au savant même que les humanités sont utiles[23] ». Un siècle a passé et le constat est toujours valable.

Olivier Rey
Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques

23. « Les sciences et les humanités », conférence de 1911. Le texte de Poincaré est disponible à l'adresse `http://michel.delord.free.fr/poincare-sh.pdf`.

Le langage mathématique dans tous ses états

Agnès Rigny et Pierre López

On entend souvent la réflexion suivante, de la part des élèves, anciens ou actuels : « les maths c'est du chinois ! » Il est vrai que, fréquemment, les difficultés viennent du sentiment de ne pas comprendre la question, de ne pas saisir de quoi ça parle. Pourtant les mathématiques utilisent peu de mots inconnus ou spécifiques, comme cela peut être le cas en médecine par exemple. Mais peut-être est-ce justement la raison de cette incompréhension ? En effet le langage mathématique emploie les mots du langage courant, mais en leur donnant un sens un peu différent, ou étendu, ou même parfois franchement autre.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Voilà une phrase qui n'utilise que des mots familiers à l'oreille, et dont le sens reste néanmoins obscur pour un non-mathématicien. Là est tout le paradoxe du langage mathématique.

Développons cette idée sur quelques exemples.

Considérons le mot « partie », « partie d'un ensemble ». Quoi de plus simple ? Ce mot a un sens clair en français : « j'utilise une partie de mes économies pour m'acheter une voiture », ou « j'ai passé une partie de mon week-end à faire des mathématiques ». Seulement voilà, en maths, une « partie », cela peut être l'ensemble tout entier, ou encore l'ensemble vide (c'est-à-dire « rien »). Un élève qui n'a pas passé une seule seconde à faire des mathématiques pendant le week-end peut bien dire, s'il parle « en maths », qu'il a utilisé une partie de son week-end pour faire son devoir de maths... Je doute que son professeur en soit satisfait. Dans ce cas-là, le mot mathématique s'appuie sur le sens du mot français, mais le sens en est élargi, poussé à l'extrême.

Si on s'intéresse aux nombres « complexes », qui sont souvent une source de grandes difficultés pour les élèves de terminale S, et même après, on observe que le mot « complexe » en définitive ne recouvre pas les mêmes sens qu'en français, en tout cas pas les sens les plus courants comme dans l'expression « avoir des complexes » ou dans le sens de « difficile, délicat : une situation complexe ». Il n'est donc pas étonnant que les élèves se bloquent devant ces nouveaux nombres. Le titre même du chapitre leur signale que

« ça va être difficile ». La terminologie de « nombres imaginaires » est également très imagée. Elle reflète la difficulté qu'ont eue les mathématiciens à accepter ce concept, qu'on retrouve également chez les élèves. Un grand nombre d'entre eux nous ont confié penser « que ces nombres n'existaient pas ». Ce qui rend délicate leur manipulation...

D'ailleurs, le mot même de nombre prête à confusion : en effet, pour la majorité des gens, les nombres servent à compter. Mais qu'est-ce que cela compte les nombres complexes ? Ce qui est surprenant, c'est ce que dit Stanislas Dehaene dans *La bosse des maths* : nous partageons en commun avec les animaux, un « organe spécialisé dans la perception et la représentation des quantités numériques ». Mais il s'agit seulement des nombres entiers naturels (d'où une justification du vocabulaire de « naturel » employé pour désigner ces nombres : ils sont vraiment dans notre nature !). Les autres types de nombres, négatifs, rationnels, réels et imaginaires, ne reposent pas sur l'intuition. En quelque sorte, ils n'existent pas dans notre cerveau. N'oublions pas que l'on raconte qu'Hippase de Métaponte fut jeté à la mer pour avoir mis en évidence les quantités incommensurables. Descartes rejetait les « nombres imaginaires » (on lui doit cette appellation) et Morgan les jugeait « dépourvus de sens, ou plutôt contradictoires ou absurdes ». Finalement, on a peut-être raison d'utiliser le mot « complexe » !

C'est en constatant l'impact que le vocabulaire mathématique avait sur la compréhension des élèves que nous est venue l'idée d'écrire un « dictionnaire français-maths ». Dans une définition mathématique, le sens véhiculé par le mot restera toujours en fond. Il s'agit de le savoir, de l'expliciter, afin d'en faire un allié plutôt qu'un ennemi.

« Parlez-vous maths ? », *Images des mathématiques*, CNRS (2016).
`http://images.math.cnrs.fr/+-Parlez-vous-maths-+.html`

AGNÈS RIGNY et PIERRE LÓPEZ

Traitement statistique de la langue

FRANÇOIS YVON

Le projet d'automatiser le calcul des traductions est un projet ancien, formulé dès la fin des années 40 par le mathématicien américain Warren Weaver, qui propose de voir dans un texte en langue source (par exemple en russe) la version cryptée d'un document en langue cible (par exemple en anglais) et d'envisager la traduction sous l'angle du décodage d'un message secret [24].

Une première question essentielle concerne la représentation du texte source : est-il suffisant de le traiter comme une suite de caractères ou de mots ? Ou bien doit-on d'abord en dériver une représentation abstraite, par exemple logique, qui en représentera le sens profond ? Cette seconde solution a longtemps été privilégiée, l'hypothèse étant que disposer de représentations plus « abstraites » facilitera la génération d'un message cible à la fois syntaxiquement correct et sémantiquement équivalent au message original. Cette approche a permis des avancées considérables dans l'élaboration de modèles symboliques (logico-déductifs) manipulant des structures discrètes combinatoires afin de construire une représentation formelle du sens de tout énoncé. Elle se heurte toutefois au besoin de disposer de descriptions extrêmement fines des contrastes linguistiques, qui sont difficiles et coûteuses à construire et qui peinent à capturer la variabilité intrinsèque et les évolutions des langues. Les mêmes difficultés de modélisation se posent pour élaborer des mécanismes de génération de textes en langue cible.

L'alternative, qui triomphe aujourd'hui, voit la traduction comme l'application d'une fonction paramétrique appariant directement un message source avec sa traduction. L'utilisation de méthodes d'apprentissage automatique appliquées à des millions de traductions humaines permet de régler automatiquement les paramètres de la fonction reproduisant au mieux les exemples fournis au système. La mise en œuvre de telles approches s'appuie massivement sur les outils des mathématiques appliquées : estimation de modèles stochastiques, optimisation numérique de fonctions continues,

24. "One naturally wonders if the problem of translation could conceivably be treated as a problem in cryptography. When I look at an article in Russian, I say 'This is really written in English, but it has been coded in some strange symbols. I will now proceed to decode.' " (Weaver, 1949)

etc. Ce changement de formalisme ne règle toutefois pas complètement la question des représentations les plus adaptées à ce type d'apprentissage, suscitant de nombreux travaux visant à apprendre des fonctions entre ensembles de structures combinatoires – appariant par exemple des arbres syntaxique (en langue source) à des séquences de mots (en langue cible). Les modèles statistiques les plus récents, fondés sur des réseaux de neurones artificiels, éludent cette difficulté et permettent d'apprendre y compris les représentations optimales des textes source et cible, sous la forme de séquences de vecteurs numériques en grande dimension.

Si les outils mathématiques ont bien changé depuis les premiers pas de la traduction automatique, depuis l'utilisation de modèles algébriques jusqu'aux techniques d'optimisation qui sont au cœur des traducteurs statistiques, la modélisation mathématique continue donc de fournir des outils essentiels pour améliorer la qualité des traductions automatiques.

François Yvon
Professeur à l'Université Paris-Sud
Équipe « Traitement de la langue parlée » du LIMSI (CNRS)

Composition des textes scientifiques

Groupe des Mathématiques de l'IGEN

La composition des textes imprimés, en particulier des textes scientifiques, obéit à un certain nombre de règles, qui étaient connues des typographes. La composition moderne sur ordinateur à l'aide d'un traitement de texte fait que la plupart des textes d'examen sont maintenant composés par des personnes ignorant les règles de la composition typographique. Le but de ce texte est de permettre de rectifier d'éventuelles erreurs typographiques lors des relectures de sujets d'examen, et d'arriver ainsi à une normalisation des sujets de mathématiques. L'ouvrage de référence en la matière s'intitule :

> *Lexique des règles typographiques en usage à l'Imprimerie nationale* (éditeur : Imprimerie nationale).

Il a servi de base à ce texte, qui y renvoie (réf. : [RT]).

1. Les polices de caractères. Il vaut mieux dans un texte n'employer qu'une police de caractères pour le texte courant. Avec les traitements de texte usuels la police Times (ou Times New Roman) donne une bonne lisibilité, mais ce n'est pas la seule à le garantir (on utilise aussi Cambria dans cette optique). Dans cette police on emploie trois styles : romain (dit aussi ordinaire), *italique* et **gras** (ou ***italique-gras***).

Pour les mathématiques, on utilise parfois :

— la polyce Symbol, qui donne les lettres grecques et certains autres signes (voir ci-dessous) ;

— et éventuellement une police, comme Atalante, qui donne les lettres rondes anglaises (cursives).

Le style gras est utilisé dans les titres, ou pour mettre en évidence une partie du texte (on évitera le style souligné). Les locutions latines non francisées, comme *a priori* ou *a fortiori*, doivent être écrites en italique dans un texte en romain. En revanche, les locutions latines francisées, comme maximum(s), sont composées en romain. Pour les locutions abrégées, il n'y a pas de règle générale : etc., cf. ou N.B. se composent en romain, mais *i.e.* en italique (voir [RT] page 7). En dehors des cas précisés ci-dessus, la composition en italique est essentiellement utilisée dans les formules de mathématiques.

2. Les nombres. Les nombres cardinaux sont en règle générale composés en chiffres arabes. Dans le cas des nombres décimaux, la virgule n'est ni suivie ni précédée d'un blanc. Ils s'écrivent par tranche de 3 chiffres à partir de la virgule séparées par une espace [25] insécable non dilatable. On ne met pas de blanc (les chiffres sont donc collés) lorsque le nombre cardinal a une valeur de numérotage : le 6 octobre 1997, la page 1251.

Pour les nombres ordinaux abrégés, on utilise des exposants :
— 1^{er}, 1^{re} pour premier, première (et non $1^{\text{ère}}$ et pas non plus $1^{\text{ière}}$) ;
— 2^{e}, 3^{e} pour deuxième, troisième (et non $2^{\text{ème}}$, $3^{\text{ème}}$) ;
— 1^{o}, 2^{o}, 3^{o} pour primo, secundo, tertio.

En revanche les nombres ordinaux contenant une variable se notent sans exposant : n-ième, p-ième pour énième, péième (et non $n^{\text{ème}}$, $p^{\text{ème}}$). Deux exceptions : i-ème, j-ème.

On ne met jamais la marque de l'ordinal quand il s'agit du dénominateur d'une fraction : une carte au 1/25 000 (et non 1/25 000^{e}).

3. Les unités. Les unités sont représentées par des symboles (et non des abréviations), qui n'ont donc pas à être suivis d'un point. Ils sont écrits en romain.

Unités de temps : h pour heure (et non H), min (et non mn) pour minute, s pour seconde. Le litre admet pour notations L ou l selon le Bureau international des poids et mesures ; néanmoins, il est vivement recommandé de ne pas utiliser la notation l (en minuscule) lorsqu'elle prête à confusion avec le chiffre 1. On pourra éventuellement recourir à une lettre ronde : 3,5 ℓ = trois litres et demi.

Pour les sommes d'argent, l'euro est noté € (et non E ni EUR), et est considéré comme une unité : une somme de 3,55 € (et non 3 € 55). On admet k€ (kiloeuro) et M€ (mégaeuro), mais ils doivent être définis dans le texte.

4. La ponctuation. Les règles d'emploi des signes de ponctuation sont détaillées dans [RT], pages 145 et suivantes. On rappelle dans la figure 2 les règles de gestion des blancs autour des signes de ponctuation (voir [RT] page 149).

25. Les espaces – le mot est du genre féminin en typographie – peuvent être élastiques, de manière à répartir les mots régulièrement sur les lignes d'un paragraphe justifié (on parle alors d'espace *justifiante*, c'est le cas pour l'espace ordinaire dans un traitement de texte), ou de largeur fixe (*cadratin*, *demi-cadratin*...). Ces dernières peuvent être en outre *insécables*, en ce sens qu'elles ne peuvent pas être coupées par une fin de ligne.

AVANT	**SIGNE de ponctuation**	**APRÈS**
pas de blanc	VIRGULE { , }	espace justifiante
pas de blanc	POINT { . }	espace justifiante
espace fine insécable	POINT-VIRGULE { ; }	espace justifiante
espace fine insécable	POINT D'EXCLAMATION { ! }	espace justifiante
espace fine insécable	POINT D'INTERROGATION { ? }	espace justifiante
espace mots insécable	DEUX-POINTS { : }	espace justifiante
espace justifiante	TIRET { – }	espace justifiante
espace justifiante	GUILLEMET OUVRANT { « }	espace mots insécable
espace mots insécable	GUILLEMET FERMANT { »}	espace justifiante
espace justifiante	PARENTHÈSE OUVRANTE { (}	pas de blanc
espace justifiante	CROCHET OUVRANT { [}	pas de blanc
pas de blanc	PARENTHÈSE FERMANTE {) }	espace justifiante
pas de blanc	CROCHET FERMANT {] }	espace justifiante

FIGURE 2. Espaces autour des signes de ponctuation

Certains traitements de texte évolués comme TEX permettent le respect automatique de ces règles dans le format français. Pour ce qui concerne les traitements de texte « bureautiques » c'est également possible en choisissant les bons paramètres de personnalisation. Notons à ce propos que dans un texte français on n'a pas à employer les guillemets anglo-saxons “ et ” sauf en deuxième niveau, comme guillemets dans un texte déjà lui-même entre guillemets.

Dans la pratique, les traitements de texte ne permettent pas facilement toutes ces subtilités. On s'en tiendra aux règles suivantes :

— les signes de ponctuations bas (. ,) sont collés à gauche et suivis d'une espace sécable ;

— les signes de ponctuation hauts (; ? !) sont précédés d'une espace insécable et suivis d'une espace sécable ;

— les parenthèses et crochets sont collés au texte intérieur et séparés du texte extérieur par une espace sécable. Un signe de ponctuation éventuel est toujours placé après la parenthèse fermante et jamais avant la parenthèse ouvrante.

5. Les mathématiques. En règle générale, pour écrire des formules et symboles mathématiques, il faut utiliser l'éditeur d'équations (ou le format mathématique), dans lequel on aura fait les réglages adéquats. Les réglages par défaut sont (presque) satisfaisants mais ils correspondent parfois aux conventions anglo-saxonnes. La composition des formules en assemblant des caractères de la police Symbol donne de piètres résultats et pose souvent des problèmes de compatiblité.

Il est parfois demandé de composer les sujets d'examen au moyen d'une police de caractères sans empattements (dite sans-serif) [26]. Pour ce qui concerne les formules mathématiques, les polices sans empattements donnent en général de mauvais résultats car elles créent des ambiguïtés parfois fort gênantes [27].

On se méfiera de l'usage immodéré de la police de caractères Symbol ; en effet, cette police n'est pas correctement normalisée, il en existe différentes versions (incompatibles) suivant les systèmes d'exploitation, ce qui peut occasionner des mésaventures lors de l'impression de fichiers PDF, surtout lorsque les polices de caractères ne sont pas incluses dans le fichier.

Dans l'alphabet latin, les minuscules qui correspondent à des variables, des inconnues, des indices, etc., sont écrites en italique. Néanmoins, sont écrits en romain les identificateurs de fonctions et constantes prédéfinies :

— les noms des fonctions usuelles sin, cos, ln, log, exp, etc. ;
— les constantes e = exp(1), i (base des imaginaires purs), le symbole d (pour écrire un « élément différentiel » $\mathrm{d}\,t$ ou $\mathrm{d}\,x$).

Pour les majuscules latines, en revanche, on emploie de préférence le romain lorsqu'il s'agit de points, de variables ou d'indéterminées. Mais pour les ensembles (en particulier les ensembles de points en géométrie : droites, plans, cercles, courbes, etc.), on a intérêt à utiliser des italiques, voire des cursives : la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, le plan $\mathscr{P}$.

Notons que dans ce cas, il n'est pas indispensable de mettre le symbole entre parenthèses. Il vaut mieux répéter à chaque fois la nature de l'objet : « Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$... »

26. Généralement la police Arial, dont les qualités typographiques prêtent à discussion.

27. Un exemple des confusions possibles est obtenu avec les lettres l minuscule, I majuscule, a minuscule, α, et le chiffre 1, dont voici le rendu en Arial 11 : l I a α 1.

Les lettres grecques, minuscules ou majuscules sont en général écrites en romain, l'essentiel étant d'adopter un même style pour tout le texte. Les chiffres et les signes opératoires ou relationnels sont toujours en romain.

Une attention toute particulière est recommandée sur les deux points suivants :

— pour désigner une limite par la lettre l, il vaut mieux utiliser une cursive ℓ, qui figure par exemple dans la police MT-Extra ;

— pour le signe de multiplication, il ne faut pas employer la lettre x ou X mais le signe spécial × qui figure dans les polices actuelles (dites étendues).

Les ensembles de nombres sont normalement écrits en gras dans un texte imprimé : **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**, les caractères « éclaircis » $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ étant en principe réservés à l'écriture au tableau. De toutes façons, il faut rappeler les conventions en début de texte chaque fois qu'il peut y avoir ambiguïté.

Les textes de mathématiques s'écrivent en français, et on évitera d'utiliser dans le texte les opérateurs mathématiques $=$, $<$, $\leqslant$, $\in$ (ils ne peuvent tenir lieu de verbes). On les réservera au mode des « mathématiques centrées » (disposition de page où une grande formule occupe seule la position centrale d'une ligne). À l'inverse, dans ce mode, on évitera les termes du langage courant, à l'exception des mots « et, ou, non », dont les équivalents mathématiques ne sont pas utilisés au lycée.

Pour terminer, il faut se rappeler que l'essentiel est de conserver dans un texte un style unifié. Il ne faut pas, par exemple, que $f(x)$ apparaisse en romain f(x) dans le texte, en italique $f(x)$ dans les formules, et en écriture bâton $\mathsf{f(x)}$ ou en style machine à écrire `f(x)` dans les figures.

GROUPE DES MATHÉMATIQUES DE L'INSPECTION GÉNÉRALE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Source : `http://igmaths.org/spip/spip.php?article202`, version du 26 octobre 2016

Miscellanées

Voici une liste de sites et de documents qui permettent de compléter la lecture du thème. Une version pdf de ce texte avec des liens utilisables se trouve sur le site de la CFEM ⟨`http://www.cfem.asso.fr`⟩ et sur le site du Forum ⟨`http://forum-maths-vivantes.fr/`⟩.

Langages mathématiques et informatiques

- Les articles de Wikipedia suivants sont un point de départ :
  - Langage mathématique,
  - Langage de programmation,
  - Loi de Zipf,
  - *L'Essayeur* ;
- ALEXANDER BOGOMOLNY : "Mathematics as a Language from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles" (consulté le 30/1/2017) ;
- LAURENT LAFFORGUE : « Les mathématiques sont-elles une langue? » (voir aussi ici) ;
- LUC ILLUSIE : Alexandre Grothendieck a changé le langage des mathématiques (*Sciences et Avenir*) ;
- ISABELLE BELLIN : Maurice Nivat : une vision à long terme de la recherche en informatique (*Interstices*) ;
- JEAN-PAUL DELAHAYE : Preuves sans mots (*Accromath*) ;
- CHRISTINE CHAMBRIS : Quelques réflexions sur l'enseignement des grandeurs, des relations entre grandeurs et nombres, voire des nombres à l'école primaire.

Quelques articles du site *Images des mathématiques*

- Sixième concours *Bulles au carré* : Mathématiques et langages ;
- AURÉLIEN ALVAREZ : Un roman dont l'héroïne est une formule ;
- MICHÈLE AUDIN : X parle à Y de Z ;
- MICHÈLE AUDIN et VALÉRIE BEAUDOUIN : Je demeurerai longtemps errant dans Césarée ;
- JEAN BRETTE : Promenade mathématique en Mésopotamie ;
- ÉTIENNE GHYS : Égalité ;
- MARIE LHUISSIER, d'après ANNE-LAURE FOUGÈRES : Lire les statistiques, cela s'apprend ;
- PATRICK POPESCU-PAMPU : Variétés ;

— Laurence Serfaty : Le charme discret des mathématiques.

Des liens pour des références à TeX ou LaTeX

— Wikilivre LaTeX ;
— Site du rectorat de Lyon : Écrire des mathématiques avec LaTeX ;
— Loïc Terrier et Isabelle Marques : Introduction à LaTeX pour les prof. de math. (diaporama, 2012) ;
— Arnaud Gazagnes : LaTeX pour prof. de math. (IREM de Lyon) ;
— Framalivre : Tout sur LaTeX ;
— Christophe Poulain : LaTeX, un exemple de logiciel libre ;
— `http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/AAA05061.htm` ;
— Jean-François Nicaud, Christophe Viudez : Communiquer avec des formules mathématiques (« Epsilonwriter ») ;

Comment écrire un texte mathématique ?

— Matthieu Romagny : Quelques conseils d'écriture mathématique rédigés pour la préparation à l'agrégation externe de l'université Rennes 1 ;
— ce document cite celui de Michèle Audin, Conseils aux auteurs de textes mathématiques ;
— Peter Cameron : How to write mathematics?

Comment composer un texte mathématique ?

L'article de la page 78, *Composition des textes scientifiques*, est extrait de l'article Composition des textes scientifiques. Règles typographiques pour la composition des textes comportant des formules mathématiques, qui cite :
— La composition des mathématiques et de la physique, sur le portail du ministère ;
— Jacques André : Petites leçons de typographie ;
— Alexandre André : Règles françaises de typographie mathématique.

Des ressources

— Sur la page Eduscol du ministère :
  — Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4, classes de 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}) ;
  — Mathématiques et maîtrise de la langue ;
  — Utiliser le calcul littéral ;

  — Expérimentation et modélisation, la place du langage mathématique en physique-chimie ;
- JEAN-LUC BREGEON : Les mathématiques et la maîtrise de la langue ;
- CASNAV DE GRENOBLE (Centre académique pour la scolarisation des enfants allophones nouvellement arrivés et des enfants issus de familles itinérantes et de voyageurs) : Lexique des mathématiques (2010) : on peut y trouver un lexique de consignes multilingues en albanais, anglais, espagnol, portugais, roumain, russe, serbe, turc ;
- JEAN-CLAUDE BEACCO, MIKE FLEMING, FRANCIS GOULLIER, EIKE THÜRMANN et HELMUT VOLLMER, avec des contributions de JOSEPH SHEILS : Guide pour l'élaboration des curriculums et pour la formation des enseignants. Les dimensions linguistiques de toutes les matières scolaires, publication du conseil de l'Europe (édition ISBN 978-92-871-8231-9, octobre 2016) ; en particulier section 8.2 Contribution des mathématiques à l'éducation aux langues. Disponible également ici.

Encore d'autres pistes, vers la littérature

- L'Oulipo (ouvroir de littérature potentielle) et les oulipiens (mathématiciens et littérateurs, littérateurs-mathématiciens, et mathématiciens-littérateurs) ;
- Alamo : Atelier de littérature assistée par la mathématique et les ordinateurs ;
- PHILIPPE BOOTZ : La littérature numérique ;
- DAVID du blog Science étonnante : La machine à inventer des mots, version Ikea ;
- FÉDÉRATION DES RECHERCHES ET DÉVELOPPEMENTS EN TEXTOMÉTRIE : Vers l'étude statistique des textes : la textométrie.

Des ouvrages

- *Le Mot et la chose*, Willard van Orman Quine, Flammarion, collection « Champs », 1977 ;
- *Les mathématiques sont la poésie des sciences*, Cédric Villani, éditions L'arbre de Diane, 2015 ;
- *Lettres à Alan Turing*, JEAN-MARC LÉVY-LEBLOND (sld) ;
- et bien sûr, la rubrique Mathématiques et littérature du site *Images des mathématiques* !

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive !

MATHÉMATIQUES ET LANGAGES

Ce livret a été préparé par la CFEM (Commission française pour l'enseignement des mathématiques) à l'occasion du Forum Mathématiques Vivantes 2017, avec le souhait de toucher un public varié.

La plupart des textes sont accessibles à un large public. Les prérequis pour lire les textes sont volontairement inégaux, de sorte que quelques-uns s'adressent plutôt à un public initié. Tous les textes apportent un regard pertinent sur le thème « mathématiques et langages », que ce soit en lien avec l'enseignement de la discipline, avec la recherche, parfois la plus récente, avec l'informatique, avec l'histoire ou la philosophie.

Des scientifiques d'horizons divers ont été sollicités et ont à leur tour sollicité d'autres collègues. La seule consigne portait sur la longueur – le but étant de réunir des articles courts permettant une introduction au thème – et le calendrier puisque le recueil est destiné à enrichir les échanges lors du Forum prévu les 17, 18 et 19 mars 2017.

La CFEM remercie vivement tous les contributeurs de ce recueil pour leurs articles, leur motivation à participer à ce projet de « Panorama », leur envie de faire partager leur intérêt, leur expertise, leur vision.

L'édition de ce livret a bénéficié du soutien du ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

Commission française pour l'enseignement des mathématiques

Académie des sciences - ADIREM - APMEP - ARDM - CNFM - IGEN - SFdS - SMAI - SMF - UPS