Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme

par Yves Chevallard et Christine Chambris

Le texte qui suit est une version retouchée et complétée d'une contribution au groupe de travail chargé de proposer un programme de mathématiques pour le cycle 2 (CP, CE1, CE2). Les développements qui suivent font usage de quelques-unes des notions les plus simples de la théorie anthropologique du didactique (TAD).

I. L'œuvre à enseigner

1. Un programme désigne un ensemble d'œuvres à étudier et donne des indications sur des techniques d'étude possibles. L'œuvre considérée ici est celle qu'on désignait traditionnellement par l'étiquette d'*arithmétique*. Ce mot désignerait, selon Littré, la « science des nombres » et « l'art de calculer ». De telles définitions n'explicitent cependant *qu'une moitié* du monde arithmétique, en oubliant sa moitié génératrice : l'univers des *grandeurs*, par quoi tout commence. À titre d'illustration, on trouvera ci-après la reproduction des deux premières pages d'une arithmétique pour le cours moyen et le certificat d'études publiée en 1931. On y saisira la logique constante de la « construction des nombres » : les nombres sont faits pour mesurer des grandeurs et l'histoire de « l'arithmétique » comme la chronique de tout enseignement de l'arithmétique peuvent se résumer par ce constat : constamment, *on manque de nombres* pour mesurer et pour calculer. Telle est la principale contrainte génératrice des différents *systèmes de nombres*.

2. On pourrait remplacer aujourd'hui l'étiquette *Arithmétique* par celle de *Grandeurs, mesures et systèmes de nombres* ou, pour faire court, de *Grandeurs et nombres*. En vérité, pourtant, au long de plusieurs décennies, il s'est produit un double phénomène : d'un côté on a oublié la « théorie des grandeurs » et ses raisons d'être ; de l'autre, et corrélativement, on a vu, dans l'enseignement scolaire et ailleurs, la fantastique promotion curriculaire des nombres – voire « *du* nombre » –, selon un processus d'hypostasiation qui a réalisé une déconstruction de l'œuvre arithmétique, sans véritable reconstruction subséquente à ce jour. C'est une telle reconstruction que doit viser aujourd'hui tout programme rénovateur : sans les grandeurs et leurs mesures, les nombres perdent leur raison d'être « ombilicale », qui les relie au monde vécu. Dans ce qui suit, on rappelle certaines données déterminantes, souvent à demi effacées dans la culture scolaire contemporaine concernant l'arithmétique.

COURS D'ARITHMÉTIQUE

PREMIÈRE PARTIE

NUMÉRATION

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

1. Grandeur. — On appelle **grandeur** ou **quantité** tout ce qui peut être augmenté ou diminué.

Ex. : un *groupe d'élèves*, la *longueur* d'un mur ; on peut supposer le groupe plus nombreux, moins nombreux ; le mur peut être plus long, moins long.

2. Espèces de grandeurs. — Il y a deux espèces de grandeurs : les grandeurs *continues* et les grandeurs *discontinues*.

Les **grandeurs continues** sont celles qui ne présentent pas de parties distinctes.

Ex. : la *longueur* d'une règle, la *surface* d'un pré.

Les **grandeurs discontinues** sont celles qui sont formées d'objets distincts.

Ex. : une *pile de cahiers*, un *sac de billes*, une *rangée d'arbres*.

3. Évaluation des grandeurs. — Pour se faire une idée exacte d'une grandeur :

1° On **compte** les objets qui la composent, s'il s'agit d'une grandeur *discontinue*.

2° On la **mesure** s'il s'agit d'une grandeur *continue*.

Dans les deux cas, on obtient pour résultat un **nombre.**

Exemples. — I. *Soit à évaluer une pile de cahiers.* On **comptera** cette grandeur. On prendra un des cahiers en disant un, puis un autre qu'on réunira au précédent en disant deux,... et ainsi de suite. Le terme qu'on énoncera en réunissant le dernier cahier de la pile aux autres sera le *nombre* de cahiers de la collection. Chacun des cahiers est une *unité.*

II. *Soit à évaluer la longueur d'un mur.* On **mesurera** cette grandeur. On choisira d'abord une unité de longueur, le mètre par exemple ; puis on cherchera combien de fois la longueur du mur contient la longueur du mètre. S'il la contient exactement *sept* fois, on dira que le mur a *sept mètres ; sept* est un *nombre.*

Mesurer une grandeur, c'est donc la comparer à une autre grandeur connue et de même espèce, appelée *unité.*

4. Unité. — L'**unité** est l'un des objets que l'on compte ; c'est aussi la grandeur connue qui sert à mesurer une autre grandeur de même espèce.

5. Nombre. — Un **nombre** est le résultat obtenu en comptant une collection d'unités ou en mesurant une grandeur.

6. Espèces de nombres. — En mesurant une grandeur, on peut obtenir trois espèces de nombres :

1° Un **nombre entier,** si la grandeur mesurée contient son unité une ou plusieurs fois exactement.

2° Une **fraction,** si la grandeur mesurée est moindre que son unité.

3° Un **nombre fractionnaire,** si la grandeur mesurée contient une ou plusieurs fois son unité et, de plus, une ou plusieurs parties de cette unité.

Remarques. — I. Les fractions et les nombres fractionnaires sont appelés, dans certains cas, **nombres décimaux.**

II. Lorsque l'on **compte** une collection d'objets, on obtient *toujours* un **nombre entier.**

II. La connaissance de l'œuvre : grandeurs et mesures

1. Une œuvre donnée ne vit pas dans un vide institutionnel, mais dans diverses institutions qui sont ses *habitats*. Chaque fois, c'est à une certaine *version* de l'œuvre que l'on a affaire, même si l'étiquette qui la désigne ne change pas. Cette version est le fruit d'un processus de transposition institutionnelle sous l'effet de diverses conditions et contraintes – dont des contraintes de nature didactique au sein de l'institution considérée, même quand cette institution ne se présente pas d'elle-même comme didactique. Une œuvre – « *le* nombre », par exemple – n'est jamais un donné tranquille. C'est toujours une réalité problématique. Une œuvre est toujours – pour notre malheur, penseront certains – une *opera aperta*, une œuvre ouverte.

2. Un programme scolaire doit désigner une version de l'œuvre qui satisfasse divers « paquets » de contraintes. Sur ce point, il semblerait que d'aucuns prennent en compte essentiellement les contraintes dont seraient porteurs 1) le public d'élèves visé, 2) la profession enseignante concernée, et 3) les environnements humains de ces deux populations

(dont les « parents d'élèves »). Cette attention est évidemment essentielle. Mais ce n'est pas *l'essentiel*.

3. Si une boutique vend des chaussures pour enfants de 6 ans, il faut, certes, que ces chaussures soient adaptées à des enfants de 6 ans – ce ne sont pas des chaussures pour adultes que l'on bourrerait de papier journal, par exemple. Mais il faut d'abord qu'il s'agisse vraiment de *chaussures*, il faut que l'offre de biens ne soit pas frauduleuse[1]. Il en va de même en matière d'enseignement. Pour reprendre une formule pédagogiquement incorrecte de Charles Péguy (1873-1914) cité par Jean-Claude Passeron (*Le raisonnement sociologique*. *L'espace non poppérien du raisonnement naturel*, Nathan, 1991, p. 349), « parlant rigoureusement, on peut dire [que les élèves] sont faits pour le cours, et que le cours n'est pas fait pour eux, puisqu'il est fait pour l'objet du cours ». Les élèves, en effet, sont censés avoir été préparés au « cours » par l'accès séquentiel aux œuvres qu'organise l'institution scolaire, année après année. Le cours, lui, doit *d'abord* être fidèle à l'*objet* du cours – à l'œuvre à enseigner. On ne doit pas tourmenter cette œuvre afin de l'adapter prétendument aux élèves jusqu'à la dénaturer, jusqu'à ce qu'elle devienne méconnaissable.

4. Qu'en est-il s'agissant de l'œuvre nommée plus haut *Grandeurs et nombres* ? Il s'agit d'une œuvre hybride, dont la création relève de deux champs disciplinaires, et non d'un seul : les *mathématiques*, d'un côté, la *métrologie* de l'autre. Il est juste de dire que, longtemps, comme le soulignait jadis Hans Freudenthal (1905-1990) dans son livre *Mathematics as an Educational Task* (D. Reidel, 1973, p. 198), le domaine des grandeurs, des unités et du calcul des grandeurs (le calcul « avec les unités », en particulier) fut longtemps, scientifiquement, un *no man's land*, que ne voulait prendre en charge sérieusement ni le physicien, ni le mathématicien. Ce n'est plus le cas aujourd'hui. L'œuvre à enseigner a été retravaillée et c'est à cette version mise à jour de l'œuvre qu'il convient désormais de se référer[2].

5. Considérons d'abord ce qui provient du champ disciplinaire sans doute le moins familier aux membres du groupe : la métrologie. À cet égard, un bon document de référence, utilement bilingue (anglais / français), a été mis en ligne en 2012 par le Bureau international des poids et mesures (BIPM) sous le double titre *International vocabulary of metrology – Basic and*

---

[1] Sur cette notion, employée ici métaphoriquement, on peut se reporter à l'article L213-1 du code de la consummation.

[2] À cet égard, le chapitre XI, intitulé « The Number Concept – Objective Access », du livre de H. Freudenthal (pp. 170-241) pourrait constituer une référence pertinente pour les travaux du GPP « Cycle 2 ».

general concepts and associated terms (VIM) / Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)[3]. Le premier usage que nous pouvons en faire consiste à fixer le vocabulaire, afin de « savoir les mots » du domaine, comme l'écrivait jadis Alain (*Souvenirs sans égards*, Aubier, 2010, p. 99). Voici un premier extrait du *VIM* (p. 2).

1 Quantities and units	**1 Grandeurs et unités**
1.1 (1.1) **quantity** property of a phenomenon, body, or substance, where the property has a magnitude that can be expressed as a number and a reference	**1.1** (1.1) **grandeur**, f propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence

Le mot *référence* est utilisé là où l'on pouvait attendre *unité*. De fait, une note indique ceci : « La référence peut être une *unité de mesure*, une *procédure de mesure*, un *matériau de référence*, ou une de leurs combinaisons. » Cela précisé, on sait que l'usage du mot *grandeur* prête à malentendus. Il y a *la* grandeur « longueur », *la* grandeur « masse », etc., et il y a *des* longueurs (12 cm, 1,7 m, etc.), *des* masses (12 g, 1,7 kg, etc.), et ainsi de suite. Comment le *VIM* distingue-t-il entre *une grandeur* (une longueur, une masse, etc.) et ce que, plus haut (dans l'arithmétique de 1931), on a vu des auteurs nommer *une espèce de grandeur* (*la* longueur, *la* masse, etc.) ? Sur ce point le *VIM* offre une solution qui paraît maladroite.

kind of quantity kind aspect common to mutually comparable **quantities**	**nature de grandeur**, f nature, f aspect commun à des **grandeurs** mutuellement comparables
NOTE 1 The division of 'quantity' according to 'kind of quantity' is to some extent arbitrary.	NOTE 1 La répartition des grandeurs selon leur nature est dans une certaine mesure arbitraire.
EXAMPLE 1 The quantities diameter, circumference, and wavelength are generally considered to be quantities of the same kind, namely of the kind of quantity called length.	EXEMPLE 1 Les grandeurs diamètre, circonférence et longueur d'onde sont généralement considérées comme des grandeurs de même nature, à savoir la nature de la longueur.
EXAMPLE 2 The quantities heat, kinetic energy, and potential energy are generally considered to be quantities of the same kind, namely of the kind of quantity called energy.	EXEMPLE 2 Les grandeurs chaleur, énergie cinétique et énergie potentielle sont généralement considérées comme des grandeurs de même nature, à savoir la nature de l'énergie.

Une espèce de grandeur, comme la grandeur « masse », c'est, en anglais, *a kind of quantity*, ce que rend bien le français « espèce de grandeur ». Le choix de l'expression « nature de grandeur » proposée par le *VIM* permet, certes, de parler de « grandeurs de même nature » mais rend improbable l'expression « la nature de grandeur "longueur" », comme le remarque d'ailleurs le document consulté lui-même :

---

[3] Voir à l'adresse http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf. Il s'agit de la 3e édition, présentée comme reprenant la 2e édition (2008) avec des « corrections mineures ».

NOTE 3 In English, the terms for quantities in the left half of the table in 1.1, Note 1, are often used for the corresponding 'kinds of quantity'. In French, the term "nature" is only used in expressions such as "grandeurs de même nature" (in English, "quantities of the same kind").	NOTE 3 En français, le terme « nature » n'est employé que dans des expressions telles que « grandeurs de même nature » (en anglais « quantities of the same kind »). En anglais, les termes désignant les grandeurs de la moitié gauche du tableau en 1.1, Note 1, sont souvent employés pour désigner les « natures » correspondantes.

En anglais, on dirait donc quelquefois *quantity* pour désigner l'*espèce* de grandeur (*the kind of quantity*), tout comme on le fait en français en employant *grandeur* pour désigner l'espèce de grandeur, en parlant de la grandeur « longueur », de la grandeur « masse », etc. Mais on n'ignore pas que, si on suivait le choix du *VIM*, on aurait quelque difficulté à parler de « la nature de grandeur "longueur" », de « la nature de grandeur "masse" », etc. D'où la proposition de retenir l'expression, traditionnelle en français, d'*espèce de grandeur* et, ainsi avertis, de ne pas s'interdire l'emploi polysémique de *grandeur* (pas plus au reste qu'on ne s'interdit en anglais l'emploi polysémique de *quantity*).

6. On illustre ci-après l'usage de l'expression *espèce de grandeur* dans (la table des matières de) l'ouvrage de Bernard Lamy, *Eléments des mathématiques ou Traité de la Grandeur en général, qui comprend l'Arithmétique, l'Algèbre, l'Analyse et les principes de toutes les sciences qui ont la grandeur pour objet* (5e édition, 1733).

LIVRE PREMIER.

Voici ensuite un passage des *Eléments d'arithmétique* (15e édition, 1837) de Pierre Louis Marie Bourdon (1779-1854) :

L'unité est arbitraire quand l'espèce de grandeur à laquelle elle appartient, peut varier d'une manière *continue*, c'est-à-dire augmenter ou diminuer d'aussi peu que l'on veut, comme une ligne, un temps, etc.; au contraire, elle est donnée par la nature même de la grandeur, toutes les fois que celle-ci augmente ou diminue d'une manière brusque ou *discontinue* : tels sont les différens genres de collections. Ainsi, dans un groupe d'arbres, considéré comme quantité, c'est nécessairement *l'arbre* qui est l'unité.

On appelle *nombre*, le résultat de la comparaison d'une grandeur quelconque à son unité.

Notons que la première édition de l'ouvrage de Lamy est de 1680. L'expression *espèce de grandeur* s'emploie de façon constante en français depuis des siècles.

7. À côté du mot *grandeur*, il existe aussi en français le mot *quantité*. Là encore, il en existe un usage traditionnel. Voici un extrait de l'ouvrage de Bernard Lamy déjà cité où l'auteur aborde la question du rapport de deux grandeurs :

> On ne compare ensemble que les choses qui sont d'une même espèce… Les rapports ou raisons dont nous devons parler sont ceux qui se font selon la *quantité*. Il y a différentes espèces de quantité ; il faut donc ajouter que ces rapports se font selon la même espèce de quantité : car on ne dit point qu'une ligne soit plus grande ou plus petite qu'une surface, qu'un corps, qu'un espace de temps, ou qu'une quantité de mouvement ; ou qu'elle leur soit égale. Or quand on considère deux grandeurs de même espèce, c'est-à-dire deux lignes, deux surfaces, deux corps, deux espaces de tems, deux quantitez de mouvement, deux poids, l'on n'y peut remarquer autre chose, comme nous venons de voir, que de l'égalité ou de l'inégalité, de la petitesse ou de l'excès. (pp. 139-140)

Dans son *Dictionnaire de la langue française* (1863-1877), Émile Littré (1801-1881) écrit d'abord à propos du mot *quantité* :

> Il se dit de tout ce qui peut être mesuré ou nombré, de tout ce qui est susceptible d'accroissement ou de diminution ; en langage d'école, accident qui fait que les corps sont susceptibles de nombre et de mesure. Mesurer une quantité. Deux quantités égales.

Puis il ajoute :

> *Terme de mathématique*. Quantité discrète, celle dont les parties ne sont pas liées, comme les nombres ; et quantité continue, celle dont les parties sont liées, comme le temps et le

mouvement, dont la quantité continue est successive, ou comme l'étendue, dont la quantité est permanente.

Rien n'indique dans l'usage de *quantité* que ce mot devrait être réservé aux « grandeurs discrètes ». Il en va pareillement, en anglais, pour *quantity*. Comme le rappelle le *TLFi* à l'entrée « Quantité », en physique on parle notamment de *quantité de mouvement*, de *quantité d'électricité*, de *quantité de chaleur*, de *quantité de lumière*, de *quantité d'énergie*. En revanche, ce mot permet plus généralement, s'il en est besoin, de parler, au lieu d'*une* grandeur, d'une *quantité de* telle ou telle (espèce de) *grandeur* : une quantité de longueur est une longueur, une quantité de masse est une masse, etc.

8. Le *VIM* ne comporte aucune occurrence des adjectifs *discret* et *discrète*. Si l'on veut entendre parler du cardinal (ou effectif, ou taille, etc.) d'une collection (d'un ensemble, d'une population, etc.), il faut aller voir le passage consacré aux « grandeurs de base » :

1.4 (1.3) **base quantity** **quantity** in a conventionally chosen subset of a given **system of quantities**, where no subset quantity can be expressed in terms of the others NOTE 1 The subset mentioned in the definition is termed the "set of base quantities". EXAMPLE The set of base quantities in the **International System of Quantities (ISQ)** is given in 1.6. NOTE 2 Base quantities are referred to as being mutually independent since a base quantity cannot be expressed as a product of powers of the other base quantities. NOTE 3 'Number of entities' can be regarded as a base quantity in any system of quantities.	**1.4** (1.3) **grandeur de base**, f **grandeur** d'un sous-ensemble choisi par convention dans un **système de grandeurs** donné de façon à ce qu'aucune grandeur du sous-ensemble ne puisse être exprimée en fonction des autres NOTE 1 Le sous-ensemble mentionné dans la définition est appelé l'ensemble des grandeurs de base. EXEMPLE L'ensemble des grandeurs de base du **Système international de grandeurs (ISQ)** est donné en 1.6. NOTE 2 Les grandeurs de base sont considérées comme mutuellement indépendantes puisqu'une grandeur de base ne peut être exprimée par un produit de puissances des autres grandeurs de base. NOTE 3 On peut considérer la grandeur «nombre d'entités» comme une grandeur de base dans tout système de grandeurs.

La note 3 mentionne « la grandeur "nombre d'entités" », c'est-à-dire *l'espèce de grandeur* « nombre d'entités ». Dans le passage consacré à la notion de grandeur *sans dimension* (p. 6), on lit ensuite que « les nombres d'entités sont des grandeurs sans dimension » :

NOTE 4 Numbers of entities are quantities of dimension one. EXAMPLES Number of turns in a coil, number of molecules in a given sample, degeneracy of the energy levels of a quantum system.	NOTE 4 Les nombres d'entités sont des grandeurs sans dimension. EXEMPLES Nombre de tours dans une bobine, nombre de molécules dans un spécimen donné, dégénérescence des niveaux d'énergie d'un système quantique.

Notons ceci : *un* nombre d'entités est *une grandeur* de l'espèce « nombre d'entités ». Contrairement à ce que pourrait laisser penser une lecture rapide du passage des *Éléments de* *mathématiques* de Pierre Bourdon reproduit plus haut, une telle grandeur peut être mesurée à l'aide de différentes unités : *le* couple ou plutôt *la* couple (2), la douzaine (12), la main (25), la rame (20 mains ou 500), etc. Il suffit pour cela, comme toujours, de disposer des nombres adéquats (on a par exemple 300 = 15 mains = 0,6 rame, etc.) Cela rappelé, il faut souligner surtout que les grandeurs (regardées usuellement comme) discrètes et les grandeurs (regardées usuellement comme) continues sont le résultat d'une construction sociale : une grandeur donnée n'est pas en elle-même discrète ou continue. Le nombre N d'individus d'une population peut ainsi être modélisé comme une grandeur *continue*, gouvernée par exemple par une équation différentielle. Mais il est sans doute plus important ici de souligner que la mesure, à l'aide d'une unité donnée, de grandeurs (regardées comme) continues réalise une *discrétisation du continu* : si la longueur U mesurée avec l'unité u a pour mesure 12, on a $U = 12\ u$. Si l'on a $12\ u < U < 13\ u$, il se peut par exemple que l'on ait $V = U - 12\ u = 3\ (u/7)$, ce qui donnera finalement $U = 87\ v$, où $v = u/7$. On peut poursuivre cette discrétisation en prenant des unités plus petites encore. Mesurer la longueur U, c'est ainsi déterminer un certain « nombre d'entités » : le nombre de longueurs v qu'il faut ajouter pour avoir l'égalité $v + v + \ldots + v = U$. On peut ainsi, avec une baguette de longueur v, mesurer la longueur U d'une salle de classe : la clé de la détermination de U sera la détermination du « nombre de fois » (plus un) que l'on aura pu reporter la baguette le long du mur de la salle (en supposant, ici, que l'opération se fait exactement).

9. Dans ce qui précède, on a parlé de mesurer une longueur ou, simplement, de déterminer un nombre d'entités. Le passage du temps provoque parfois de lourdes pertes lexicales qui, elles-mêmes, provoquent des confusions conceptuelles dommageables. On a vu plus haut Littré dire qu'une quantité, c'est « tout ce qui peut être mesuré ou nombré ». Le verbe *nombrer* n'est plus guère usité aujourd'hui : seul subsiste le lourd *dénombrer*. Le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993) indique (dans l'article « Nombre ») :

> Quant à **nombrer** v. tr. (v. 1080, *numbrer*), il est probablement issu du latin *numerare* « compter, évaluer en nombre » et aussi « payer, mettre au nombre de », dérivé de *numerus*. <> En français, le verbe signifie « évaluer en nombre » et « énumérer » (1314) mais il a perdu du terrain au profit du composé *dénombrer* (voir ci-dessous).

Un peu plus loin, on lit alors :

> *Nombrer* a reculé au bénéfice de **dénombrer** v. tr. (v. 1120), emprunté, avec adaptation d'après *nombre*, au latin *dinumerare* « calculer, énumérer en comptant », de *di* et *numerare*, avec

influence phonétique de *nombrer*. *Dénombrer* correspond à « compter exhaustivement et précisément ».

Notons en passant l'existence d'un autre cadavre dans le placard aux mots oubliés :

Le nom correspondant, **dénombrement** n.m. (1329) a d'abord été employé en droit féodal pour la déclaration détaillée qu'un vassal faisait à son seigneur de tout ce qu'il détenait de lui en fief. ◇ Au milieu du XIIIe s., on relève un autre *dénombrement* « diminution de nombre », dérivé de *desnombrer*, v. t., « soustraire d'un nombre » (v. 1225) que son homonymie gênante avec *dénombrer* « énumérer » a fait éliminer.

Voici maintenant l'article « Nombrer » du dictionnaire de l'Académie française dans sa 9e édition (actuellement en cours de rédaction) :

NOMBRER v. tr. XIe siècle, *numbrer*. Issu du latin *numerare,* « compter, nombrer ».
Vieilli. Indiquer le nombre des éléments qui forment un ensemble. *Cet argent lui a été compté et nombré en présence des notaires*. Anciennt. *Nombre nombrant,* synonyme de *Nombre abstrait*. *Nombre nombré,* synonyme de *Nombre concret*. ● Aujourd'hui, ne s'emploie guère que dans la langue soutenue et dans des tournures négatives ou interrogatives. *On ne saurait nombrer les grains de sable de la mer*. *Qui pourrait nombrer les désordres et les malheurs que causent les guerres civiles ?*

Et voici l'article correspondant dans la *première* édition du dictionnaire de l'Académie (1694) :

Nombrer. v. a. Compter, Supputer combien il y a d'unitez dans une quantité. *On ne sçauroit nombrer les estoiles du Ciel ni les grains de sable de la mer*. *qui pourroit nombrer les desordres & les malheurs que causent les guerres civiles? cet argent luy a esté compté & nombré en presence des Notaires*.

On voit que les académiciens ont fort peu travaillé sur *nombrer* au cours des trois cents dernières années. Mais revenons à la mesure des grandeurs. Dans l'exemple pris au point précédent, pour mesurer la longueur U, on doit *nombrer* les reports de la baguette unité auxquels on a procédé (après quoi on procède à un calcul très simple, en ajoutant 1 à ce nombre de reports). On retrouve là le phénomène de discrétisation du continu.

10. Déterminer un nombre d'entités, c'est donc *nombrer* l'ensemble (la collection, etc.) de ces entités. (Il est intéressant de noter que, d'après ce qui précède, on a pu employer *nombrer* de préférence à propos de collections… quasi innombrables.) Nombrer une collection est donc

un *type de tâches*. À ce type de tâches il convient d'associer une *technique* (ainsi bien sûr qu'une *technologie*, etc.). Il semble que le mot *dénombrement* renvoie, de manière plus ou moins floue, à une telle technique ou plutôt à un ensemble de telles techniques. Le *TLFi* définit ainsi le fait de dénombrer : « Déterminer le nombre des éléments d'un ensemble en les comptant, en les énonçant un à un. » Il ne s'agit donc pas seulement de « nombrer un ensemble », mais bien de le faire d'une façon déterminée : ici, en en comptant les éléments, « en les énonçant un à un ». L'article « Dénombrement » de *Wikipédia* dit cela sans ambages : « En mathématiques, le *dénombrement* est la détermination du nombre d'éléments d'un ensemble. Il s'obtient en général par un comptage ou par un calcul de son cardinal à l'aide de techniques combinatoires. » La fin de cette définition ouvre sur la combinatoire, sur ce qu'on nomme en anglais *enumerative combinatorics* : il est clair, en ce cas, que le « dénombrement » se fait à l'aide d'un calcul et non d'un pur et simple « comptage » à l'aide de la suite des entiers. À cet égard, il est bon d'examiner comment *dénombrer* se dit en anglais. Plusieurs mots peuvent faire l'affaire : ainsi existe-t-il le verbe *to number* (qui signifie « to determine the number or amount of », c'est-à-dire… nombrer) ; mais le plus fréquemment employé semble être le verbe *to count* : on pourra voir là-dessus les « Exemples de traduction provenant de sources externes pour "dénombrer" » du dictionnaire *Linguee*[4]. Selon le dictionnaire en ligne *Macmillan*, le verbe *to count*, qui peut signifier très étroitement « to say numbers one after another in order », signifie plus largement « to calculate how many people or things there are in a group ». Dans l'article « Enumerative combinatorics » de *Wikipedia*, l'emploi de *to count* n'est manifestement pas enfermé dans l'acception étroite du mot, comme le suggère ce passage :

> **Enumerative combinatorics** is an area of combinatorics that deals with the number of ways that certain patterns can be formed. Two examples of this type of problem are counting combinations and counting permutations. More generally, given an infinite collection of finite sets S_i indexed by the natural numbers, enumerative combinatorics seeks to describe a *counting function* which counts the number of objects in S_n for each n. Although counting the number of elements in a set is a rather broad mathematical problem, many of the problems that arise in applications have a relatively simple combinatorial description.

On peut ainsi parler de *techniques de dénombrement*, c'est-à-dire de techniques permettant de « nombrer » certains types d'ensembles finis. Les techniques de dénombrement sont multiples

[4] À l'adresse http://www.linguee.fr/francais-anglais/traduction/dénombrer.html.

et varient notamment avec le type de collections à nombrer. Aucune, bien entendu, *n'a une portée universelle*.

IV. La connaissance de l'œuvre : mesures et nombres

1. La détermination de l'œuvre à enseigner – ici nommée *Grandeurs et nombres* (titre court) – doit assurer une certaine authenticité à cet enseignement. La section précédente visait à préciser certains points concernant son authenticité *métrologique*. On examine ici très rapidement la question de son authenticité *mathématique*.

2. Il y a un préalable à l'abord de cette question. Il y a l'œuvre et il y a le *rapport* d'une *personne* ou d'une *institution* à l'œuvre. L'enseignement a pour objet d'aider à la construction et à l'évolution de ce rapport. Mais on doit s'efforcer toujours de distinguer l'œuvre – saisie et objectivée à l'aide de ce qu'on appelle en TAD un *modèle praxéologique de référence* (pour le chercheur, pour le formateur, pour l'enseignant, etc.) – et les éléments constitutifs du rapport à l'œuvre dont la construction est visée.

3. Mathématiquement, un *système de nombres* $\mathbb{S}$ est un anneau ou un semi-anneau ordonné, commutatif et intègre, qu'on peut écrire $\mathbb{S} = [\mathfrak{N} ; <, +, 0, \times , 1]$. La première rencontre avec une telle œuvre et le développement corrélatif du rapport à cette œuvre peuvent se faire de bien des façons, notamment parce que ce rapport se construit à propos d'une partie finie $\mathfrak{N}^*$ de $\mathfrak{N}$ et ne concerne qu'une partie de la *structure* du système de nombres. Dans le rapport en cours d'élaboration, les éléments de $\mathfrak{N}$ peuvent n'être regardés d'abord que comme des *étiquettes* possibles – comme il en va pour les « numéros » des joueurs de football ou pour le parfum « N° 5 » de Chanel[5]. Ils peuvent aussi être regardés comme des *numéros*, ce qui signifie que, au moins sur l'ensemble des étiquettes chiffrées composant $\mathfrak{N}^*$, l'ordre usuel est reconnu et connu, en sorte que le rapport à $\mathbb{S}$ alors développé reconnaît un système de nombres en devenir qu'on peut noter $\mathbb{S}^* = [\mathfrak{N}^* ; <, \ldots]$.

4. D'une manière générale, on peut avancer trois principes touchant l'analyse de l'histoire scolaire du rapport (personnel, institutionnel) à l'œuvre considérée. Tout d'abord, dans l'analyse de la *statique* du rapport à l'œuvre (analyse qui vise à établir comment ce rapport est

[5] En pratique, aujourd'hui, le « nombre » 5 fonctionne dans ce dernier cas comme une pure étiquette et non comme un numéro : voir l'article « N° 5 (parfum) » de *Wikipédia*. En revanche, l'appel de note de cette note de bas de page utilise bien un numéro, en l'espèce le numéro 5.

fait, comment il « fonctionne »), nombre d'éléments que l'on croit déceler sont seulement *conjecturaux* : le regard adulte sur le comportement de l'enfant doit notamment y apprécier, sans s'en offusquer, le travail de la mimèsis enfantine, qui, aux yeux de certains, conduit l'élève à « refaire sans comprendre *vraiment* »[6]. Ensuite, dans l'analyse de la *dynamique* de ce rapport, aucun élément n'est « honteux » : il participe des conditions et contraintes de la construction du rapport et doit être assumé à ce titre sans vaciller. Enfin, et surtout peut-être, dans la gestion didactique de l'évolution du rapport, il faut reconnaître le rôle clé du *travail d'après-coup*, tel que le processus didactique peut le provoquer et le réguler[7].

5. Pour ces raisons, un programme doit moins interdire ceci ou cela, surtout quand on sait que ceci et cela ne manqueront pas d'advenir sous une forme ou une autre, qu'inciter à analyser et à opérer dans une visée univoque, largement agréée, en assumant une dynamique qui ne saurait éliminer d'avance, entièrement, les stases et (peut-être) les culs-de-sac cognitifs. Pour donner une idée en passant de ce qu'on doit pouvoir apercevoir dans « l'effroyable » monde enfantin des rapports aux « nombres », voici une historiette transposant dans un univers d'adultes certains de ces éléments.

① Dans une arrière-boutique, un employé E doit effectuer de façon répétée la tâche suivante. Il dispose d'un petit appareil qui lui fournit une papillote quand il appuie sur le bouton approprié. Pour cela, il doit faire démarrer une session en remettant l'appareil à zéro (en appuyant sur un autre bouton prévu à cet effet). Cela ayant été fait, la première pression sur le bouton de sortie provoque l'apparition d'une papillote munie d'une petite étiquette marquée du chiffre 1. E retire cette étiquette, la met dans un petit sac « poubelle », et place la papillote dans un sachet. Il répète l'opération, mettant ainsi dans le sachet une papillote étiquetée 2, etc. Il s'arrête quand il juge que le sachet contient assez de papillotes. Il écrit alors sur une étiquette fixée sur le sachet l'indication chiffrée figurant sur la dernière papillote qu'il a mise dans le sachet. (La direction de l'atelier a vérifié au préalable que l'employé E est capable de lire et d'écrire des suites finies de chiffres.)

② Lorsque le sachet est mis en vente dans la boutique, la vendeuse V indique aux clients intéressés qu'il contient le nombre de papillotes précisé sur l'étiquette. (Les clients ayant un haut niveau d'instruction arithmétique, la vendeuse peut, elle, ne pas savoir lire ce nombre.)

---

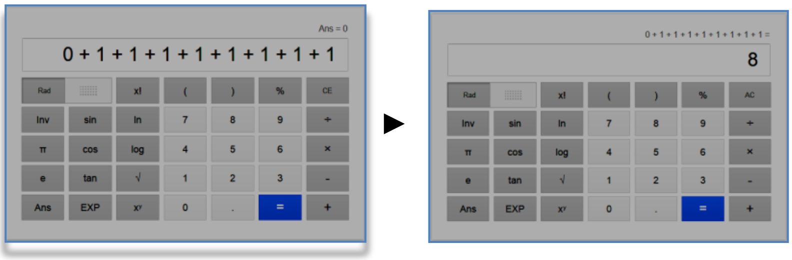
[6] On pourrait être tenté de répliquer à qui s'interrogerait ainsi : « Et vous, est-ce que vous comprenez *vraiment* ? »

[7] Le nom d'après-coup traduit ici l'allemand freudien *Nachträglichkeit*, rendu en anglais par *afterwardsness*.

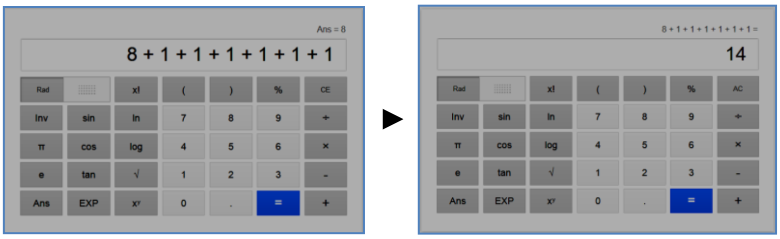
③ Le patron P, tatillon, procède à des contrôles aléatoires. Pour ce qui est du travail de E, il passe de façon inopinée dans le local où E travaille, relève le nombre de papillotes écrit sur l'étiquette du dernier sachet préparé par E et emporte le petit sac poubelle contenant les étiquettes des papillotes mises dans ce sachet par E. P a, lui aussi, un haut niveau d'instruction : il connaît assez bien l'ordre sur l'ensemble des entiers. Plus précisément, étant donné deux entiers pas trop grands, il sait dire lequel des deux est le plus grand. Pour procéder à la vérification visée, il procède ainsi : il prend deux étiquettes, compare les nombres écrits sur ces étiquettes, conserve celle qui porte le nombre le plus grand et rejette l'autre ; puis il prend une troisième étiquette, la compare à celle qu'il a conservée, rejette de même l'une des deux et conserve l'autre ; il répète ce cycle jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'étiquettes dans le sac. Le nombre écrit sur la dernière étiquette conservée doit être égal à celui relevé sur le sachet de papillotes.

④ Un jour un cas de désaccord survient : le sachet annonce 16 papillotes et P trouve pour maximum des étiquettes le numéro 15 ! Il se rend auprès de E et lui demande s'il peut expliquer ce désaccord fâcheux. E a été dérangé par un appel venant d'un collègue travaillant dans une autre pièce alors qu'il avait mis une dernière papillote dans le sachet et l'étiquette correspondante dans le petit sac poubelle, sans avoir encore écrit sur le sachet le dernier numéro sorti. Quant il est revenu, il a réalisé qu'il hésitait sur ce dernier numéro : 15 ou 16 ? Pressé, il a cru pouvoir se fier à sa mémoire : il a écrit « 16 ». Rétrospectivement, il lui revient qu'il avait d'abord pensé aller jusqu'à 16 avec la machine, mais qu'à 15 il a jugé que c'était bon, un fait qu'il avait oublié après l'interruption. P lui demande s'il serait capable de sortir toutes les étiquettes du petit sac poubelle et de les ranger dans l'ordre où la machine les sort. E répond que, au début, il ne savait pas le faire (il a interrompu ses études en moyenne section de maternelle) mais que, maintenant, à force de voir sortir les papillotes numérotées de la machine, il a appris parfaitement la suite des entiers jusqu'à un rang qui, cependant, ne dépasse pas 30 : 1, 2, 3, … Il ajoute, admiratif : « Au CP, il paraît qu'ils vont au moins jusqu'à cent ! » Craignant de paraître ignorant des mœurs scolaires – il pensait que, au CP, on allait jusqu'à mille… –, P acquiesce mais enjoint à E, si pareille mésaventure lui arrivait à nouveau, de disposer les étiquettes sur la table et de les ranger « dans l'ordre de la machine » pour déterminer le dernier numéro sorti. E promet qu'il n'y manquera pas.

⑤ E a été marqué par l'incident. Il discute avec un collègue, I, qui a toujours été gentil avec lui et qui est très savant : il est l'informaticien de l'entreprise. I lui dit qu'il peut se servir d'une calculatrice pour savoir « à chaque instant » combien il a mis de papillotes dans le sachet. E répond qu'il n'a pas de calculatrice. I lui montre l'ordinateur éteint à côté de lui ; il l'allume et lui montre la calculatrice de Google et la manière dont il peut s'en servir. Chaque fois que E met une papillote dans le sachet, il tape + 1, comme on le voit ci-dessous à gauche ; puis il appuie sur la touche $\boxed{=}$ et obtient ce que l'on voit à droite.

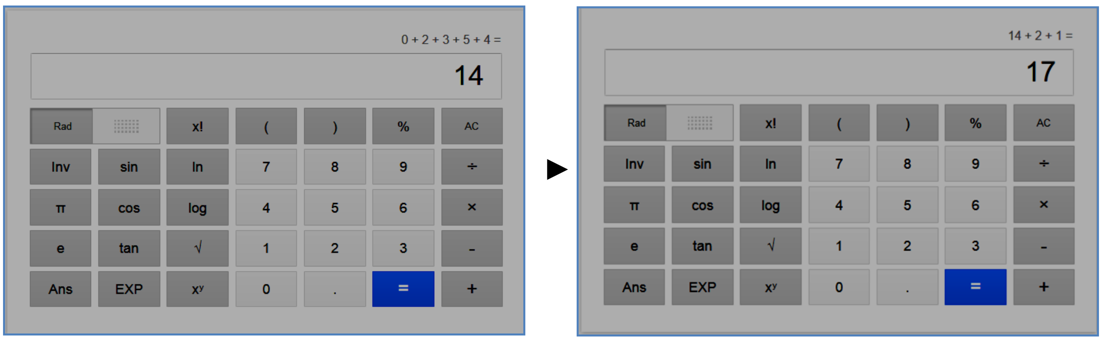


« Et si je veux continuer ? » demande anxieusement E. Il suffit, répond I, de continuer à taper des + 1, comme on le voit ci-après.



E est enchanté de cette nouvelle technique, encore qu'il ne soit pas vraiment sûr que la calculatrice lui fournira toujours le même numéro que celui écrit sur l'étiquette de la dernière papillote... Il l'avoue à I. Celui-ci le rabroue ironiquement tout en rectifiant son propos : pas « numéro », voyons, mais « nombre » ! E le remercie pour son aide.

⑥ E utilise aussitôt la technique de I. La calculatrice et la machine à papillotes sont tout le temps d'accord ! Un jour vient à E une idée lumineuse : il pourrait « oublier » les étiquettes et n'utiliser que la calculatrice. Prudent, il se livre d'abord à des « expériences », tout en cachant soigneusement cela à son entourage, et particulièrement à P. Il fait sortir deux ou trois papillotes « d'un coup » et ajoute sur la calculatrice 2 ou 3 selon le cas. La calculatrice est toujours d'accord avec la machine à papillotes. Bientôt, il se dispense de regarder les étiquettes, sauf la dernière, pour vérification. La calculatrice lui donne toute satisfaction, comme dans le cas ci-après, où E prépare un sachet contenant finalement 17 papillotes.



⑦ Au moment où ces lignes sont écrites, E s'entraîne à faire comme son patron tatillon. Il met toujours les étiquettes dans un petit sac poubelle, mais maintenant il ne les regarde plus du tout. Quand il a mis la dernière papillote dans un sachet et écrit le nombre de papillotes fourni par la calculatrice sur l'étiquette du sachet, il se livre à des comparaisons par paires entre les étiquettes placées dans le petit sac poubelle afin de déterminer le plus grand numéro sorti : c'est toujours le nombre qu'il a écrit sur le sachet ! Il adore faire ça. Il a l'impression de réaliser un vrai tour de magie. Mais il craint de se faire prendre car, comme lui a dit un collègue, « il n'est pas payé pour ça ». Parfois il se surprend lui-même à penser que, dans cette boîte, on ne fait pas grand-chose pour encourager les études.

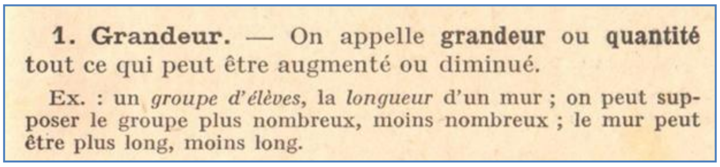
6. On pourra imaginer quels événements, survenant dans sa vie de labeur, pourraient faire que E découvre maintenant les charmes de la soustraction, etc.

Marseille, le 19 janvier 2015

Notes complémentaires

1. L'extrait du manuel d'arithmétique publié en 1931 reproduit dans le texte ci-dessus comporte une regrettable amphibologie. On lit en effet page 1 : « Il y a deux espèces de grandeurs : les grandeurs *continues* et les grandeurs *discontinues*. » Il faut en fait entendre ici que, parmi les espèces de grandeurs, certaines sont continues et d'autres sont discontinues ; et non pas qu'il existerait seulement *deux* espèces de grandeurs, l'espèce des grandeurs continues et celle des grandeurs discontinues. En vérité, ce dernier énoncé devrait être formulé ainsi : il existe deux espèces (ou sortes, ou catégories, etc.) d'espèces de grandeurs : les espèces de grandeurs continues, d'une part, les espèces de grandeurs discontinues, d'autre part. Cette interprétation ne fait pas de doute. Les mêmes auteurs – « une réunion de professeurs » – écrivent en effet à la page 2 de leur ouvrage (c'est nous qui soulignons) : « Mesurer une grandeur, c'est donc la comparer à une autre grandeur connue et *de même espèce*, appelée unité. » Ils écrivent encore : « L'unité est l'un des objets que l'on compte ; c'est aussi la grandeur connue qui sert à mesurer une autre grandeur *de même espèce*. »

2. Une question peut être soulevée à propos des remarques sur les grandeurs et les nombres développées jusqu'ici : si l'expression « 15 cm » désigne bien une grandeur (de l'espèce « longueur »), qu'en est-il des expressions « 15 pommes » ou « 5 cahiers » ? Désignent-elles des grandeurs ? Dans les pages du manuel de 1931 reproduites plus haut, on lit ceci :


1. Grandeur. — On appelle **grandeur** ou **quantité** tout ce qui peut être augmenté ou diminué.

Ex. : un *groupe d'élèves*, la *longueur* d'un mur ; on peut supposer le groupe plus nombreux, moins nombreux ; le mur peut être plus long, moins long.

À suivre ce texte, un *groupe d'élèves* serait donc une grandeur. En fait, *il n'en est rien*. Il faudrait écrire ici : « L'*effectif* (la taille, le cardinal) d'un groupe d'élèves, la *longueur* d'un mur [sont des grandeurs]. » Pour préciser ce point, plusieurs éclaircissements sont utiles.

2. Tout d'abord, il est vrai que, dans la *théorie classique des grandeurs*, on regarde des expressions telles que « 5 kilomètres » et « 5 cahiers » comme désignant l'une et l'autre des grandeurs (dont la mesure est 5 par rapport à une certaine unité). La première expression désigne bien une grandeur, écrite usuellement 5 km : c'est une grandeur de l'espèce « longueur ». Il n'en va pas de même de la seconde, qui renvoie à un certain *type d'objet*, à savoir un *ensemble de cahiers* dont l'effectif est 5. Il est vrai encore que la théorie classique

des grandeurs a subsumé sous une même notion ces deux types d'entités : 5 était regardé autrefois comme un « nombre abstrait » (ou « nombre nombrant ») tandis que 5 cm, 5 pommes, 5 cahiers, 5 tableaux noirs étaient nommés « nombres concrets » (ou « nombre nombrés »). À l'entrée « Nombre », Littré précise ceci :

> Nombre concret, celui qui exprime l'espèce de l'unité, comme vingt ans, cent écus, dit aussi, bien que rarement aujourd'hui, nombre nombré. Dans quatre arbres, quatre a une signification concrète. Multiplier 4 mètres 39 par 3 francs 80, pour former un certain produit, est faire une multiplication de nombres concrets.

On aura noté, dans ce passage, la référence à *l'espèce* (de grandeur) de l'unité de mesure utilisée. On remarquera aussi qu'une petite ambiguïté s'y fait jour : un nombre concret, est-ce 3 kg, 15 pommes, etc. ? Ou est-ce le nombre 3 dans l'expression « 3 kg », le nombre 15 dans l'expression « 15 pommes », etc. ? L'article « Concret » de l'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert, c'est-à-dire de l'*Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1751-1772), ne permet pas de lever cette ambiguïté :

> Concret ; *nombre concret* est opposé à *nombre abstrait:* c'est un nombre par lequel on désigne telle ou telle chose en particulier. *Voyez* Abstrait. Ainsi quand je dis *trois* en général, sans l'appliquer à rien, c'est un nombre abstrait ; mais si je dis *trois hommes,* ou *trois heures,* ou *trois piés,* &c. *trois* devient alors un nombre *concret*. On ne multiplie point des nombres *concrets* les uns par les autres : ainsi c'est une puérilité que de demander, comme font certains arithméticiens, le produit de 3 livres 3 sous 3 deniers, par 3 livres 3 sous 3 deniers. En effet la multiplication ne consiste qu'à prendre un certain nombre de fois quelque chose ; d'où il s'ensuit que dans la multiplication le multiplicateur est toujours censé un nombre abstrait. On peut diviser des *concrets* par des abstraits ou par des *concrets* ; ainsi je puis diviser 6 sous par 2 sous, c'est-à-dire chercher combien de fois 2 sous est contenu dans 6 sous ; & le quotient sera alors un nombre abstrait. On peut aussi diviser un *concret* par un abstrait : par exemple, 6 sous par 3, c'est-à-dire chercher le tiers de 6 sous ; & le quotient sera alors un nombre *concret,* savoir 2 sous. Dans les opérations arithmétiques on dépouille les nombres des idées d'abstrait & de *concret,* pour faciliter ces opérations ; mais il faut les leur rendre après l'opération pour se former des idées bien nettes.

L'auteur fait ici référence aux notions de *partition* et de *quotition* [8]. En remplaçant « sou » par « centimètre », on aura par exemple, pour la partition, l'égalité $\frac{6\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}$, qui signifie que, si l'on fait deux parts d'égale longueur d'un objet de longueur 6 cm, on obtient deux objets de

[8] Voir l'article « Quotition and partition » de *Wikipedia*.

longueur 3 cm. Et on aura de même, s'agissant de la quotition, l'égalité $\frac{6\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 3$, qui signifie que la longueur 2 cm est « contenue 3 fois » dans la longueur 6 cm.

3. Dans ce qu'on peut appeler la *théorie moderne des grandeurs*, telle par exemple que s'en fait l'écho le *VIM* publié par le BIPM, l'entité désignée par l'expression « 15 pommes » n'est pas plus une grandeur que l'entité « 15 m de tissu ». Dans cette dernière expression, « 15 m » désigne la longueur de la pièce de tissu hypothétique à laquelle on se réfère – une pièce de tissu de 15 m de long (ou de longueur 15 m). Dans l'expression « 15 pommes », c'est « 15 » qui désigne une grandeur, ce qu'on voit mieux en utilisant l'expression moins usuelle « 15 unités de pommes », et ce qui est plus clair encore si, au lieu de cela, on considère « deux dizaines de pommes », où l'on a souligné la grandeur. Voici par exemple un extrait de la *Petite arithmétique raisonnée* d'Hippolyte V. Vernier (1834, pp. 3-4)[9].

> **2. Je veux indiquer exactement le nombre des pommes renfermées dans un sac, quelque grand qu'il puisse être. Je retire les pommes et les range dix par dix, jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans le sac assez de pommes pour former une nouvelle *dizaine*. Le nombre des pommes qui resteront sera désigné par un des neuf premiers mots, un, deux, trois, etc.; et si le nombre des dizaines que j'ai retirées du sac n'excédait pas neuf, le nombre total des pommes qui y étaient renfermées serait désigné sans employer aucun mot nouveau. Par exemple, il se composerait de sept dizaines de pommes, et de huit unités de pommes.**

Dans « sept dizaines de pommes », c'est l'expression « sept dizaines » qui exprime l'espèce de grandeur « Nombre d'entités » à propos d'un certain ensemble de pommes ; dans « huit unités de pommes », c'est « huit unités » qui joue ce rôle, c'est-à-dire, pour parler comme le *VIM*, qui donne la *valeur* de la grandeur (de l'espèce) « Nombre d'entités » d'un autre ensemble de pommes.

4. Le *VIM* (p. 12) définit en effet la *valeur d'une grandeur* comme formée « d'un nombre et d'une référence constituant l'expression quantitative d'une grandeur ». Ainsi, y lit-on encore, la « longueur d'une tige donnée » peut avoir pour valeur « 5,34 m ou 534 cm ». Bien entendu, cette notion de valeur d'une grandeur ne concerne que… les grandeurs. Soit un sac contenant des pommes. Parmi les grandeurs attachées à cet objet, on peut distinguer son poids, par exemple 2,1 kg, ainsi que le nombre de pommes qu'il contient, par exemple 15. Un certain nombre *de pommes*, c'est-à-dire un ensemble de pommes de cardinal donné, n'est pas plus

[9] http://books.google.fr/books?id=DDI1AAAAcAAJ&pg=PA3&hl=fr&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false. On trouvera aussi des exemples en présentant au moteur de recherche Google la requête, en anglais et entre guillemets, "units of oranges", par exemple.

une grandeur que ne l'est une certaine longueur *de tissu*, c'est-à-dire un tissu d'une certaine longueur. Dans les deux cas, l'expression utilisée renvoie à un type d'objet (un tissu, un sac de pommes) auquel est attachée une grandeur d'une certaine espèce, dont on donne la *valeur* : par exemple une *longueur* de 3 m (pour le tissu) ou un *nombre d'entités* de 15 (pour le sac de pommes).

5. Que peut-on dire, mathématiquement, des expressions telles que « 3 m de tissu », « deux douzaines d'œufs » ou « 15 pommes » ? Supposons qu'un magasin vende quatre articles : un certain type de câble, vendu au mètre ; des kiwis, vendus à la pièce ; un traité de parémiologie, vendu à la pièce aussi ; enfin un certain type de tissu, vendu au mètre. L'état du *stock* du magasin peut être décrit par quatre quantités : la quantité q_c de câble, la quantité q_k de kiwis, la quantité q_p de traités de parémiologie et la quantité q_t de tissu. Les quantités q_c et q_t sont de même espèce : ce sont des longueurs ; de même, les quantités q_k et q_p sont de même espèce : ce son des « nombres d'entités ». Le stock est décrit par le quadruplet de quantités (q_c, q_k, q_p, q_t), égal par exemple à (57 m, 24, 15, 73 m). Si le gérant de la boutique reçoit de son fournisseur 4 décamètres de tissu, le stock devient (57 m, 24, 15, 73 m + 4 dam), soit encore (57 m, 24, 15, 113 m). Si dans la période suivante, la boutique a vendu 23 m de câble, 12 kiwis, 3 exemplaires du traité de parémiologie et 47 m de tissu, à l'issue de cette période le stock tombera à (34 m, 12, 12, 66 m). D'une façon générale on peut écrire

$$(q_c, q_k, q_p, q_t) = (q_c, 0, 0, 0) + (0, q_k, 0, 0) + (0, 0, q_p, 0) + (0, 0, 0, q_t).$$

En introduisant des variables formelles **c**, **k**, **p** et **t**, cette somme peut être écrite

$$q_c\,\mathbf{c} + q_k\,\mathbf{k} + q_p\,\mathbf{p} + q_t\,\mathbf{t}.$$

Plus concrètement, on pourra écrire

q_c de câble + q_k de kiwis + q_p de traités de parémiologie + q_t de tissu

et donc, par exemple,

34 m de câble + une douzaine de kiwis + une douzaine de traités de parémiologie + 66 m de tissu.

Ou encore : 34 m de câble + 12 kiwis + 12 traités de parémiologie + 66 m de tissu. Dans la modélisation mathématique esquissée ici, ce qu'on s'autorisera à faire dépendra de diverses décisions de modélisation. On pourra par exemple multiplier un stock par un entier positif k :

$$k(q_c\,\mathbf{c} + q_k\,\mathbf{k} + q_p\,\mathbf{p} + q_t\,\mathbf{t}) = kq_c\,\mathbf{c} + kq_k\,\mathbf{k} + kq_p\,\mathbf{p} + kq_t\,\mathbf{t}.$$

Ainsi pourra-t-on doubler le stock :

(34 m de câble + 12 kiwis + 12 traités de parémiologie + 66 m de tissu) × 2 =

68 m de câble + 24 kiwis + 24 traités de parémiologie + 132 m de tissu.

Dans la première partie de son grand article de 1968, « The Mathematics of Physical Quantities » (*The American Mathematical Monthly, 75*, 115-138), le mathématicien américain Hassler Whitney (1907-1989) donnait cet exemple (p. 116) :

> For a plebeian illustration, suppose there will be six children at a party. We wish each to have two balloons and three cookies. What is the total supply needed? The answer is:
>
> 6(2 bl + 3 ck) = 6(2 bl) + 6(3 ck) = 12 bl + 18 ck.

Il s'agit ici de calculer, non plus sur des grandeurs, mais sur des types d'objets – un ensemble de deux ballons, un ensemble de trois cookies, ce qu'il est possible de faire sans confondre de tels objets avec des grandeurs. C'est ainsi que, alors que, dans un système de grandeurs, les grandeurs de l'espèce « longueur », forment une demi-droite (ou une droite) vectorielle *unique* (qu'on peut écrire indifféremment $\mathbb{R}^+$ cm, ou $\mathbb{R}^+$ m, etc.), le modèle de stock considéré plus haut comporte *deux* telles demi-droites vectorielles, à savoir celle relative aux longueurs de câble et celle relative aux longueurs de tissu. Cela ne doit pas empêcher de considérer « 2 m de câble » ou « 2 m de tissu » ; mais – c'est le point de vue des clients de la boutique ! – cela ne saurait faire oublier que ces deux types d'objet, qui ne sont pas des grandeurs, ne sont ni identiques, ni interchangeables (ils n'ont pas la même valeur d'usage), même s'ils ont bien la même longueur.

6. Plusieurs remarques encore mériteraient d'être développées qu'on ne fera ici que signaler. Tout d'abord, et d'une manière très générale, en matière de grandeurs et de calcul sur les grandeurs, la culture scolaire traditionnelle est extrêmement déficitaire. Par exemple, il est fréquent[10] qu'on n'ose pas considérer des expressions telle que « 21 cm + 2 dm + 8 mm » et écrire des égalités comme : 21 cm + 2 dm + 8 mm = 21 cm + 20 cm + 0,8 cm = 41,8 cm = 418 mm = 0,418 m. Ou encore on n'ose pas écrire franchement que l'on a : 2 cm × 3 cm = 6 cm^2. Ce déficit d'élaboration, traditionnel, n'est pas l'apanage de la France, comme le suggèrent certaines notations de Hassler Whitney dans l'article déjà cité, où, à propos du

[10] Dans l'enseignement primaire et secondaire. Il en va autrement ailleurs. Dans l'ouvrage *Sapeur-pompier professionnel de 2^e classe* publié chez Foucher en 2005, les auteurs, Odile Girault, Rémy Paul et Michel Philbert, proposent par exemple l'exercice suivant (p. 95) : « Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat en mètres : 57 hm + 238 dam + 505 m ; 345 dam – 857 m. » Ou encore celui-ci : « Exprimer en m^3 : 26,37 dam^3 + 70 000 dm^3 ; 3,47 dam^3 – 85 500 dm^3. »

modèle mathématique des grandeurs qu'il présente, il évoque les « mystères » de l'ancienne « théorie » des grandeurs (p. 115) :

> **Working in the model.** Various properties of a model and its operations have obvious meaning in the applications. For instance we have distributive and associative laws :
>
> $$5 \text{ cakes} + 2 \text{ cakes} = (5 + 2) \text{ cakes} = 7 \text{ cakes}$$
> $$2 \text{ yd} = 2(3 \text{ ft}) = (2 \times 3)\text{ft} = 6 \text{ ft}.$$
>
> The fact that "2 yd" and "6 ft" name the same element of the model enables us to say they are equal; there is no need for such mysterious phrases as "2 yd measures the same as 6 ft."

Notons encore, en ce point, que, s'agissant plus précisément du problème que soulève l'expression « 15 pommes », la brochure « Grandeur Mesure », tome VI de la série des *Mots*, publiée par l'APMEP en 1982, conserve fâcheusement l'interprétation classique. On y lit notamment ceci :

> On décide que la phrase : "Cette commune a une population p de 1200 habitants" construite de la même façon que : "Cette commune a une superficie s de 1800 hectares" est à interpréter de façon comparable ; et on écrit "p = 1200 habitants" comme on écrit "s = 1800 ha". Adoptant le langage plus sophistiqué déjà rencontré, on dirait : "La mesure de p, quand on prend l'habitant pour unité, est 1200" comme on dit : "La mesure de s, quand on prend l'hectare pour unité, est 1800". (pp. 78-79)

Si l'on peut bien écrire « p = 1200 habitants », cela ne désigne pas une grandeur (contrairement à « 1800 ha »), mais un ensemble d'habitants de cardinal 1200. L'énoncé « La mesure de p, quand on prend l'habitant pour unité, est 1200 » devrait être rectifié ainsi : « La mesure de <u>l'effectif de</u> p, quand on prend <u>1</u> pour unité, est 1200. » Les mêmes auteurs auraient pu écrire – ils le font un peu plus loin, ou presque (p. 79) – cet autre énoncé fautif : « La mesure de p, quand on prend la *centaine d'habitants* pour unité, est 12. » En ce cas, il faudrait écrire : « La mesure de <u>l'effectif de</u> p, quand on prend <u>100</u> (ou la centaine) pour unité, est 12. » L'espèce de grandeur est ici ce que le *VIM* nomme, nous le savons, « nombre d'entités ». À propos des grandeurs sans dimension, plus généralement, cette publication du BIPM précise encore :

> Les unités des grandeurs sans dimension sont des nombres. Dans certains cas, on leur donne des noms spéciaux, par exemple radian, stéradian et décibel, ou on les exprime par des quotients comme la millimole par mole égale à 10^{-3}, et le microgramme par kilogramme égal à 10^{-9}. (p. 7)

Un peu plus loin (p. 8), les mêmes auteurs précisent encore : « Dans tout système d'unités, l'unité dérivée cohérente de toute grandeur dérivée sans dimension est le nombre *un*, de symbole 1. Le nom et le symbole de l'unité de mesure un sont généralement omis. » En d'autres termes, on n'exprimera pas le nombre d'habitants par l'expression « 1200 1 » mais, selon l'usage commun, simplement par « 1200 », remplaçant ainsi une grandeur (1200 1) par sa mesure (1200) – ce qui simplifie la vie, certes, mais ne contribue pas toujours à la clarification conceptuelle indispensable.

7. Une deuxième remarque a trait aux nombres utilisés, qu'on a restreint plus haut, tacitement, à être des entiers dans le cas des kiwis et des traités de parémiologie. Peut-on admettre des nombres décimaux ou fractionnaires, par exemple – et donc des fractions de fruits ou de livres ? Dans la réalité commerciale, sans doute pas. Mais dans sa modélisation, c'est là une très longue tradition associée à la fructueuse exigence de *précision* des calculs, même quand cette volonté semble irréaliste parce que le modèle mathématique dans lequel on calcule est reconnu comme très approximatif[11]. Le problème se pose avec quelque acuité dès qu'on emploi un modèle proportionnel, c'est-à-dire que l'on fait une règle de trois : si un certain ouvrage est fait par 3 ouvriers en 10 jours, alors on peut dire – en se fiant à un modèle dont on sait peut-être qu'il ne modélise que fort imparfaitement la situation – que, pour le faire en 4 jours, il faudrait $\frac{10}{4}$ fois plus d'ouvriers, soit $3 \times \frac{10}{4}$ ouvriers ou 7,5 ouvriers. Les plaisanteries (et incompréhensions) populistes ordinaires (« Je n'ai jamais vu 0,5 ouvrier ou 0,7 livre, etc. ») ne sauraient avoir leur place, sinon comme *discours à déconstruire*, dans le cadre de la diffusion raisonnée de la culture scientifique *réelle*.

8. Une troisième remarque, qu'il conviendrait de reprendre et de développer *ab ovo*, a trait à la distinction traditionnelle des « grandeurs continues » et des « grandeurs discrètes ». On a dit que ces notions n'apparaissent pas dans le *VIM*. Il faut répéter que cette distinction n'est pas dans le donné – ou du moins dans ce qu'on est porté à croire « donné par la nature » – mais dans le modèle qui en est socialement construit : il y a seulement des *modèles discrets* et des *modèles continus*. Lorsqu'on calcule une certaine valeur à l'aide de la règle de trois, on utilise un modèle continu ; de là les « fractions d'ouvriers » ou les « fractions de livres » qui peuvent apparaître en fin de calcul. En ce cas, on modélise comme une « grandeur continue », c'est-à-dire censée se laisser décrire par des *variables continues*, une réalité que nous tenons

[11] Là-dessus, voir notamment l'article de Lorraine Daston paru en 1995 dans la revue *Osiris* (*10*, 2-34), « The Moral Economy of Science ».

pour discrète *intrinsèquement*[12]. L'inverse se produit tout aussi bien. Sur ce point, nous devrons nous contenter, *ici*, d'un exemple rencontré sur un forum de physique[13]. Un intervenant y soulève la question suivante :

> "The electrical charge exists in discrete quantities, which are integral multipuls of the electronic charge, 1.6022 e -19 C"
> What does "discrete quantities" mean? and Why is electrical charge an *integral* multipul of the electronic charge instead of just a *multipul* of the electronic charge?

Voici la réponse apportée par un autre intervenant, qui, paradoxalement, tente de tirer parti de la prétendue incongruité qu'il y aurait à se donner un modèle continu d'une réalité supposée intrinsèquement discrète :

> "Discrete" means that it can only have certain values, not just any old value. For example, the number of sheep in a field is discrete quantity; you can only have 1 sheep, or 2 sheep, or 3 sheep, etc., but not some fractional number like 1.34995 sheep. Electric charge works the same way: you can only have 1 elementary charge (elementary charge = electron charge), or 2 × the elementary charge, or 3 × the elementary charge, etc., but not any fractional number.
> As for *why*? Nobody really knows. There is some theoretical speculation of reasons why charge occurs only in integral multiples of the elementary charge, but nothing super-convincing. All we really have to go on is that nobody's ever seen a charge which *wasn't* an integral multiple of the elementary charge.

Michael Faraday (1791-1867) fut, dit-on, le premier à noter la nature discrète de la charge électrique. Cette conclusion sera ensuite établie de manière directe par les fameuses expériences de Robert Millikan (1868-1953). Ainsi va la vie[14].

Marseille et Paris, le 18 février 2015

---

[12] Faut-il rappeler que la Clause 3 de la Section 2 de l'Article 1 introduite en 1787 dans la Constitution des États-Unis d'Amérique comptait un esclave, dans la population totale d'un État, non pas pour un (à l'instar de chacun des hommes libres de l'État), mais pour *trois cinquièmes* seulement, soit 0,6 ? (Cette clause devint sans objet après l'abolition de l'esclavage en 1865 : voir l'article « Three-Fifths Compromise » de *Wikipedia*.)

[13] À l'adresse https://www.physicsforums.com/threads/what-is-a-discrete-quantity.401907/. Le premier intervenant use d'une graphie fautive (mais ressentie comme homophone) du mot *multiple*.

[14] Que soit remercié Gérard Sensevy, sans qui ce texte, comme le précédent, n'existerait pas. Sa responsabilité n'est, bien sûr, nullement engagée par le contenu de notre exposé.

Note additionnelle

1. Dans un article intitulé « ISO terminological analysis of the VIM3 concepts 'quantity' and 'kind-of-quantity' », publié dans la revue *Metrologia* en 2010 (47, 127-134), l'auteur, René Dybkaer, indique (p. 127), si nous le comprenons bien, que, en anglais, le mot *kind*, au sens d'*espèce* dans « espèce de grandeur », aurait été introduit par James Clerk Maxwell (1831-1879) dans le volume 1 de son *opus magnum* intitulé *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Londres, Macmillan, 1873). (Cet ouvrage est téléchargeable à l'adresse http://iris.univ-lille1.fr/handle/1908/3097.) Voici les premières lignes où Maxwell utilise cette terminologie (nous avons souligné les passages où figurent les diverses occurrences du mot) :

On the Measurement of Quantities

> 1.] Every expression of a Quantity consists of two factors or components. One of these is the name of a certain known quantity of the same kind as the quantity to be expressed, which is taken as a standard of reference. The other component is the number of times the standard is to be taken in order to make up the required quantity. The standard quantity is technically called the Unit, and the number is called the Numerical Value of the quantity.
>
> There must be as many different units as there are different kinds of quantities to be measured, but in all dynamical sciences it is possible to define these units in terms of the three fundamental units of Length, Time, and Mass. Thus the units of area and of volume are defined respectively as the square and the cube whose sides are the unit of length.
>
> Sometimes, however, we find several units of the same kind founded on independent considerations. Thus the gallon, or the volume of ten pounds of water, is used as a unit of capacity as well as the cubic foot. The gallon may be a convenient measure in some cases, but it is not a systematic one, since its numerical relation to the cubic foot is not a round integral number.

2. Le volume 1 de l'ouvrage de Maxwell a fait l'objet, en 1885, d'une traduction en français, sous le titre de *Traité d'électricité et de magnétisme*. Cette traduction, qui a paru chez Gauthier-Villars à Paris, était due à G. Séligman-Lui (1855-1915), ancien élève de l'École polytechnique et ingénieur des Télégraphes[15]. Voici le passage qui correspond à l'original en anglais précédemment cité ; on notera que le traducteur a choisi de rendre *quantity* par « quantité » :

[15] Rééditée en 1989 par les Éditions Jacques Gabay, elle est actuellement disponible en ligne à l'adresse suivante : https://www.irphe.fr/~clanet/otherpaperfile/articles/Maxwell/N0029035_PDF_1_604.pdf.

De la mesure des quantités

> 1. L'expression de toute quantité se compose de deux facteurs ou éléments. L'un d'eux est le nom d'une certaine quantité bien connue, qui est de même espèce que la quantité à exprimer, et que l'on choisit pour étalon de mesure. L'autre élément est le nombre de fois qu'il faut prendre l'étalon pour reproduire la quantité voulue. Dans le langage technique, la quantité qui sert d'étalon est appelée l'*unité* ; et le nombre est appelé *valeur numérique de la quantité*.
>
> Il faut autant d'unités différentes qu'il y a d'espèces différentes de quantités à mesurer ; mais, dans toutes les sciences dynamiques, il est possible de définir ces unités au moyen des trois unités fondamentales de longueur, de temps et de masse. Ainsi les unités d'aire et de volume sont définies comme étant le carré et le cube ayant pour côté l'unité de longueur.
>
> Quelquefois cependant on trouve plusieurs unités de même espèce établies d'après des considérations indépendantes. Ainsi le gallon, c'est-à-dire le volume de dix livres d'eau, sert d'unité de capacité en même temps que le pied cube. Le gallon peut être une mesure convenable dans certains cas, mais ce n'est point une mesure systématique, car sa relation numérique avec le pied cube n'est pas un nombre entier rond.

3. L'exemple précédent a pour lui son prestige scientifique. Bien d'autres exemples pourraient être donnés[16]. L'article « Quantity » de *Wikipedia* rappelle ainsi la définition de la notion de nombre que donne Isaac Newton (1642-1727) dans sa *Universal Arithmetick* (1728, p. 2)[17] : « By *Number* we understand not so much a Multitude of Unities, as the abstracted *Ratio* of any Quantity to another Quantity of the same Kind, which we take for Unity. » Dans le volume 11 de l'*Encyclopédie ou dictionnaire des sciences, des arts et des métiers* (1751), à l'entrée « Nombre » (p. 202), Jean-Baptiste de La Chapelle (v. 1710-v. 1792) se fera l'écho de la définition newtonienne[18] : « M. Newton définit plus précisément le *nombre*, non pas une multitude d'unités, comme Euclide, mais le rapport abstrait d'une quantité à une autre de la même espèce, que l'on prend pour l'unité. » Notons encore que, avant Newton, John Wallis (1616-1703), dans son *Mathesis Universalis* (1657), cité également dans l'article « Quantity » de *Wikipedia*, parle, lui, de *genus* (de « genre ») d'une quantité (d'une grandeur) :

> When a comparison in terms of ratio is made, the resultant ratio often [namely with the exception of the 'numerical genus' itself] leaves the genus of quantities compared, and passes into the numerical genus, whatever the genus of quantities compared may have been.

[16] On notera que l'exemple ci-après dément l'affirmation prêtée plus haut à Dybkaer (2010).

[17] Voir à https://archive.org/stream/universalarithm00hallgoog#page/n17/mode/2up.

[18] Voir à http://portail.atilf.fr/encyclopedie/images/V11/ENC_11-202.jpeg.

En français, la continuité d’usage du mot *espèce* pour désigner les espèces de grandeur semble on ne peut mieux attestée.

Marseille et Paris, le 29 mai 2015