# Conditions et contraintes de la recherche en didactique des mathématiques : un témoignage

Yves **CHEVALLARD**

Université de Provence

y.chevallard@free.fr

**Résumé**

Ce texte reprend et résume mon intervention le 14 octobre 2011 dans le cadre du *Colloquium* organisé par l'ARDM et la CFEM. Il présente un bilan partiel et parcellaire, subjectif par méthode, de mon activité de chercheur en didactique des mathématiques et de quelques-uns des problèmes du métier que j'ai rencontrés au long de plusieurs décennies de pratique.

**Mots clés**

Approche autobiographique, chercheur, didactique, mathématiques, problème, profession

## Approche autobiographique et problèmes de la profession

J'ai été invité par l'ARDM et la CFEM – la *Commission française pour l'enseignement des mathématiques* – à m'exprimer, le 14 octobre 2011, dans le cadre du *Colloquium* que ces deux sociétés savantes organisent conjointement chaque année. Je dois cette invitation, non à un intérêt particulier pour ma personne, mais au fait que l'*International Commission on Mathematical Instruction* (en français, la Commission internationale de l'enseignement mathématique), dont la CFEM est la sous-commission française, m'a attribué le prix Hans Freudenthal pour 2009. Ce prix, attribué tous les deux ans, honore *a major cumulative research program*. Chacun sait que Guy Brousseau a été lui-même, en 2003, le lauréat du prix jumeau, le prix Felix Klein, qui honore *a lifetime achievement*. Je suis évidemment très heureux d'inscrire mon nom après le sien et celui de quelques autres collègues dans les annales de l'ICMI.

Je voudrais employer cette occasion tout à fait exceptionnelle pour tenter d'amorcer une réflexion sur un thème peu fréquenté, me semble-t-il, mais qui a pris une importance croissante à mes yeux au fil des années. De même qu'on peut s'interroger sur les problèmes de la profession de professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire (sauf exception, je parlerai simplement de *professeur* ci-après), on peut s'interroger sur *les problèmes de la profession de chercheur en didactique des mathématiques* (je parlerai simplement de *chercheur* ci-après). Et de même qu'on peut tenter d'identifier leurs problèmes en observant et en interrogeant des professeurs, on peut chercher à repérer les problèmes des chercheurs en les observant et en les interrogeant. Pour ce faire, une technique particulière consisterait à solliciter d'eux des mémoires autobiographiques où ils répondraient librement à la question : « Quelles difficultés avez-vous rencontrées dans l'exercice de votre métier de chercheur qui puissent être regardées comme des problèmes de la profession de chercheur ? » C'est bien cela que je commencerai à faire ici même, mais en sollicitant ma *propre* expérience de quelque 35 années de recherche en didactique des mathématiques.

J'ose espérer que l'inévitable personnalisation de mon propos rencontrera une attention bienveillante. Le bilan qui suit s'arrête à l'année 2000. Il est divisé en cinq périodes, dont chacune est scindée en trois sections, intitulées respectivement *Chronique*, *Ce que j'ai appris* et *Problèmes de la profession*. Dans cette dernière section, j'ai formulé un petit nombre de questions qui tentent d'énoncer ce que je crois être des problèmes importants de la profession de chercheur. Inutile d'ajouter qu'il s'agit là d'un choix parmi un ensemble beaucoup plus vaste. Chaque question se termine par cette apostrophe à la communauté des didacticiens des mathématiques : *Que comptez-vous faire à cet égard ?* Pendant des années, j'ai été confronté à des interpellations auxquelles j'ai essayé de ne pas me dérober. Avec un rien de malice peut-être, je profite ici d'une circonstance exceptionnelle pour retourner le compliment.

# Première période : jusqu'en 1961

## *Chronique 1*

Je suis né en 1946. J'ai vécu dans un village proche de Marseille – Carry-le-Rouet –, à la population alors plus que modeste, où j'allais à l'école communale. Un acteur célèbre, Fernandel, y possédait une maison, où il venait régulièrement séjourner. En hiver, le village me semblait coupé du monde que je pressentais à travers la radio et les quelques livres que je me procurais. L'instituteur, fidèle du mouvement Freinet, ouvrait aussi des horizons : « *La Gerbe* est arrivée ! » est un cri qui résonne encore à mes oreilles. À l'été surtout, on voyait arriver des « riches » de Marseille. J'ai tôt appris par leurs enfants, mes camarades de jeu, l'existence de deux ordres scolaires, l'ordre primaire et l'ordre secondaire, comme disent les historiens. Ainsi, nous, nous étions à la communale, en CM1, quand nos camarades « urbains » étaient au lycée, en 8$^{e}$. En même temps, j'ai moi-même connu pendant trois années les classes élémentaires du lycée Carnot de Tunis : comme souvent, je balançais, au gré d'une histoire familiale compliquée, entre deux systèmes qui, en apparence, s'ignoraient. Après la communale, je suis demeuré dans l'ordre primaire de la sixième à la troisième en devenant l'élève, de la rentrée 1957 aux vacances d'été de 1961, d'un cours complémentaire d'une petite ville proche, Martigues [1].

## *Ce que j'ai appris 1*

Tout cela, et en particulier l'expérience de « l'ordre primaire », a marqué le didacticien que je suis devenu. À Tunis, au milieu du XX$^{e}$ siècle, je rencontrai un univers familial scolairement archaïque où, comme au XIX$^{e}$ siècle, de même qu'on se souciait que le petit écolier fût muni d'un crayon, d'une gomme, d'une trousse, etc., on s'assurait qu'il disposât d'*un* livre de grammaire, d'*un* livre de calcul, etc., sans que ceux-ci dussent être identiques à ceux utilisés par les autres élèves de la classe, qui étaient pourtant déjà soumis, eux, aux normes « modernes » d'unicité du manuel dans une même classe. Je m'en souviendrais longtemps après devant la résurgence de cet « esprit XIX$^{e}$ siècle » lorsqu'apparurent les calculatrices : longtemps les professeurs et les « autorités » n'osèrent pas imposer aux élèves d'une classe donnée de disposer d'un unique modèle de calculatrice, au motif notamment qu'on ne pouvait s'autoriser à favoriser commercialement telle ou telle marque – ce qui semblait pourtant depuis longtemps ne plus faire problème s'agissant des manuels.

Au cours complémentaire, en sixième, nous découvrîmes rétrospectivement que, à l'école communale de Carry, Freinet aidant, la formation n'avait pas été aussi resserrée sur le français et les mathématiques qu'en d'autres CM2. Cela suffisait pour être accusé de « dilettantisme ». Ce fut pour moi la première stigmatisation d'un rapport à la connaissance et à l'ignorance un peu décalé. En même temps, les petits *pacoulins* que nous étions n'avaient droit ni au grec, ni au latin, dont on régalait les brillants sujets de la ville, ni à une seconde langue vivante. J'ai

[1] Sur ce qu'était alors un cours complémentaire, comme sur tous les points sur lesquels il le jugera utile, je laisse au lecteur le soin de s'informer par lui-même (à l'aide d'une brève recherche sur Internet ou autrement).

découvert ainsi ce que je nommerai beaucoup plus tard la pénurie praxéologique, la rétention organisée de connaissances, et, du même coup, la difficulté profonde à contrebattre cette pénurie officielle, la quête corrélative de connaissances « introuvables », le bricolage « didactique » pour se les procurer personnellement.

En sixième et en cinquième, le professeur d'anglais était un jeune étudiant en sciences, sympathique et rigoureux, que le rectorat avait envoyé là, selon ses dires, à cause de la pénurie de professeurs et au motif que sa note au bac en cette matière n'était pas mauvaise. Beaucoup plus tard, ses enfants ne le connaîtront que comme professeur de mathématiques. Mais son sérieux et son engagement étaient grands et je n'eus pas à me plaindre de ce que je pus apprendre avec lui. (Au lycée, je serai même présenté au concours général d'anglais, il est vrai sans succès.) C'est là que, comme il était usuel alors, j'appris l'alphabet phonétique international. De tout cela il m'est resté un doute touchant l'idée que l'élève apprendrait d'autant plus et d'autant mieux que le professeur est plus savant : c'est à l'élève d'étudier, le professeur ne peut que l'*aider* à étudier − mais il peut l'aider *mieux*.

Le ressouvenir des mathématiques étudiées au cours complémentaire de l'Île à Martigues a joué un rôle dès mes premiers travaux de didactique : c'est là par exemple que j'appris la distinction entre l'équivalence, notée $A \equiv B$, de deux expressions algébriques $A$ et $B$ et leur égalité, notée $A = B$ et construite syntaxiquement de façon à impliquer l'équivalence. Bien d'autres choses m'en sont restées qui ont nourri ma réflexion. Dans cet univers scolairement et socialement dominé, nombre de professeurs étaient d'anciens instituteurs épris de république, de laïcité, de savoir, de culture : j'appris là qu'on pouvait vouloir faire son travail le mieux possible et en même temps bannir toute esbroufe ; il m'en est resté une indifférence totale à l'esprit de compétition, si naturel à certains qu'ils ne peuvent imaginer qu'on y soit inaccessible.

J'ai vécu toutes ces années dans une grande proximité avec mon grand-père maternel, que j'ai évoqué dans un article intitulé *Concepts fondamentaux de la didactique* (1992). Issu du petit peuple marseillais, il jetait sur le monde un regard moqueur et volontiers sceptique. J'ai appris de lui une défiance dubitative face à tout ce qui est censé « aller de soi », à ce qu'on nomme en anglais *taken-for-grantedness*. J'en ai conservé une rétivité devant toutes les orthodoxies, ce qui a fait de moi un agnostique en toutes matières, tout à fait incapable de partager simplement les vérités communes.

## Problèmes de la profession 1

J'ai eu tôt conscience que le « vécu didactique » de l'enfant puis de l'adolescent qu'il a été constitue pour le chercheur une première matière première de sa *clinique du didactique*, socle où prendront appui toutes les techniques de recherche, qu'elles soient dites « cliniques », « expérimentales » ou autres. (Le recours au ressouvenir est ainsi au cœur de la *technique des témoins* utilisée encore récemment pour l'exploration de l'offre praxéologique en un domaine donné : voir Ladage et Chevallard 2011.) Lorsque le témoin est le chercheur lui-même, ce ressouvenir, qui suppose d'abord une anamnèse personnelle, suppose ensuite un *travail d'après-coup* qui objective institutionnellement les productions de l'anamnèse personnelle et les dépersonnalise. (L'examen de manuels anciens porte ainsi à la vue de *quiconque* l'usage de la relation d'équivalence algébrique mentionnée plus haut.) Or il me semble que, sur toutes ces choses, existe aujourd'hui, dans la communauté des didacticiens des mathématiques français, un lourd silence institutionnel, qu'inspire un parti-pris discutable mais trop peu discuté pour des techniques de recherche réputées « sûres » à l'exclusion de toute autre. D'où cette question qui pourra, je l'espère, « faire problème » pour cette communauté : *Quelle part le vécu objectivé du chercheur peut-il avoir dans la recherche aujourd'hui ? Peut-on, et* *comment, lever l'interdit qui semble peser sur l'usage des matériaux issus du ressouvenir en la matière ? Comment « socialiser » de tels fragments cliniques sans les enfermer dans une nouvelle orthodoxie rigide ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Bien entendu, il y a en l'espèce deux poids et deux mesures : le ressouvenir de l'élève, voire du professeur semble accepté, surtout si vous interrogez 500 élèves ou 100 professeurs ; le ressouvenir qui, souvent à son insu, meut le chercheur n'est pas reconnu. C'est là, à mes yeux, un problème non trivial de la profession de chercheur.

# Deuxième période : jusqu'en 1967

## *Chronique 2*

En 1961, j'entre au lycée Thiers de Marseille, alors parangon de l'ordre secondaire. (Le proviseur reprendra vivement une interlocutrice – qui me rapportera l'épisode – en lui lançant qu'on n'était pas dans son lycée pour réussir le bac mais pour tenter Polytechnique.) Je resterai là jusqu'à l'entrée à la rue d'Ulm, en 1967. J'avais de bons, voire de très bons résultats scolaires. Mais, je l'ai déjà souligné, je restai un *refuznik* au plan des usages institutionnels, quoique je fusse respectueux des gens et plutôt bien toléré par les professeurs et l'administration. Lisant il y a peu un petit livre de l'anthropologue Marshall Sahlins (2008), je suis tombé sur cette plaisanterie semble-t-il bien connue (p. 111) : à quelqu'un qui lui dit banalement *"Have a nice day!"*, ce qu'il faut entendre *ici* de façon littérale (soit à peu près « Prenez-vous une journée agréable »), un quidam ombrageux rétorque, outragé : "DON'T TELL ME WHAT TO DO!" – « Ne me dites pas ce que je dois faire ! » Tel était le sentiment dominant de ces années, où, bien sûr, j'appris beaucoup.

## *Ce que j'ai appris 2*

En seconde, le professeur de mathématiques, homme vertueux et craint, nous demanda tout de go ce que valait la racine carrée de $a^2$. Nous répondîmes en chœur la réponse apprise en troisième : « plus ou moins $a$ ». Le ciel nous tomba sur la tête : il fallait répondre « valeur absolue de $a$ ». J'apprends là en un seul coup la relativité institutionnelle des connaissances. En seconde encore, je me procure le livre d'André Lentin et Jacques Rivaud, *Éléments d'algèbre moderne*, paru chez Vuibert en 1956. Je découvre sans bien le comprendre un autre monde, apparemment éloigné du monde mathématique scolaire fait alors de paraboles et d'équations du second degré. Les mathématiques, c'est donc *cela* qui nous est enseigné et *ce n'est pas cela*. Ce que sont les mathématiques *est ainsi problématique*. Le monde bouge ; j'explore un tant soit peu cet autre monde, mais aussi les mondes d'*avant*, tels par exemple que me les révèlent la *Géométrie dans l'espace* de Jacques Hadamard (8e éd., 1949) ou le *Nouveau cours de mathématiques générales* de Robert Deltheil (1959), que me prête un proche, élève d'une école d'ingénieurs marseillaise.

En 1964, j'entre en Maths sup. Les entrants devaient alors passer une épreuve de mathématiques, en quelque sorte « pour voir ». À mon habitude, je n'avais aucune idée de ce qu'il adviendrait de moi ; la plupart des autres candidats m'étaient d'ailleurs inconnus. Divine surprise, je fus classé deuxième. L'élève classé premier s'appelait Alain Connes, qui devait recevoir la médaille Fields en 1982. Conséquence de cet heureux hasard, nous fûmes assis côte à côte tout au long de l'année, en haut du petit amphithéâtre que régentait Victor Charlier de Chily, qui sur-jouait souvent son rôle. Ce que je voyais en observant Alain me montrait ce que pouvait être un rapport aux mathématiques incommensurable avec les rapports personnels « ordinaires » qui seuls m'étaient connus. Nous fûmes séparés en Math spé. Il entra à la rue d'Ulm en 3/2, moi en 5/2. Un jour que, rue d'Ulm, je traversais la cour avec des camarades de promotion, nous le vîmes en train de travailler seul. Sa réputation s'était répandue. Sachant que je le connaissais, ces camarades me demandèrent ce que je pensais de lui. Je répondis sobrement : « C'est un génie. » Si l'histoire s'était arrêtée là, certains de mes collègues didacticiens d'aujourd'hui m'auraient sans doute demandé : « Tu peux le prouver ? » Une année d'observation clinique proche, en ce cas, m'avait suffi amplement pour m'en persuader.

À l'issue de la Maths sup., on me proposa d'aller dans la classe de Maths spé. de Jules Brun mais je préférai choisir la classe de l'autre professeur de spéciales M', André Pfeiffer. Pour des raisons de santé, l'année fut pour moi difficile, malgré la bienveillance du professeur. J'en retiendrai que je vécus en acte un fait qu'il est facile de relier à mes intérêts didactiques actuels et dont je n'avais jusqu'alors qu'une connaissance personnelle intime : contrairement à ce que les usages scolaires pouvaient laisser croire, un problème vrai ne se résout pas au fil de la plume ; le temps qu'on y consacre est une variable essentielle et il faut donc apprendre à vivre *normalement et durablement* dans la compagnie d'un problème ouvert, sans l'écarter, sans l'oublier. André Pfeiffer nous proposait parfois des exercices sur lesquels il séchait lui-même et il n'hésitait pas alors à y revenir jour après jour, en nous montrant chaque fois le peu qu'il avait trouvé depuis la veille. Un exercice sur une équation matricielle nous retint ainsi quatre jours de suite, ce qui, d'après les mœurs taupinales d'alors, semblait incongru.

La classe de l'année 1965-1966 eut des résultats calamiteux. Pfeiffer réagit trop vite – à mes yeux – en « vidant » certains élèves, dont quelques-uns furent « rétrogradés » dans une spéciale M. Parmi eux se trouvait un garçon qui ne se mettait pas en avant mais que j'avais appris à apprécier lors des heures de travail hors de la présence du professeur. Je trouvais que la décision le concernant n'était pas seulement injuste : elle était le fruit d'une erreur de jugement. De fait, à la fin de l'année passée en M, classe qui ne préparait pas à ce concours, il fut reçu à l'X, ce qui me réjouit fort sans m'étonner du tout. La notion de *position institutionnelle* me devint évidente : depuis sa position de professeur, André Pfeiffer ne pouvait voir ce que je voyais dans la position de proximité clinique que j'occupais à l'égard de mon camarade. La reprise en main avait cependant opéré : sur les deux classes de M', nous fûmes quatre, cette année-là, à intégrer la rue d'Ulm.

## Problèmes de la profession 2

Les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques constituent en France un haut lieu de l'initiation mathématique des jeunes générations. Un rapport normé aux mathématiques y prévaut largement. En simplifiant un peu, on peut dire que, dans le rapport *mathématicien* aux mathématiques, les mathématiques sont un ensemble de problèmes *ouverts*, à résoudre à plus ou moins long terme, alors que, dans le rapport *taupinal* aux mathématiques, elles sont un ensemble de problèmes *résolus*, c'est-à-dire *refermés*, ou à résoudre sans attendre. Il s'agit là de deux types de rapports qui me semblent avoir été reçus (institutionnellement, car les variations personnelles sont innombrables) de façon peu critique, comme un donné non questionné. Plus précisément le rapport taupinal, qui prévaut sous des formes succédanées au secondaire *stricto sensu*, semble constituer une référence ordinaire dans l'imaginaire des didacticiens, même si, dans la noosphère, la fascination pour le rapport mathématicien fait régulièrement résurgence. (De très mauvaises habitudes ont été prises lorsqu'on a décrété, il y a quelques décennies, qu'un didacticien des mathématiques devait avoir aux mathématiques « au moins » le rapport moyen d'un professeur certifié ou agrégé de mathématiques.) Voici alors la question que je propose à notre profession comme l'un de ses problèmes : *Comment situer, construire, faire évoluer un rapport didacticien aux mathématiques qui soit véritablement adéquat au projet d'une science du didactique en mathématiques ? Corrélativement, comment étudier comme des réalités objectives parmi d'autres les rapports mathématicien, taupinal ou professoral aux mathématiques, en évitant d'en faire soit des* *standards, soit des fétiches ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Un tel rapport didacticien doit libérer le chercheur d'assujettissements allogènes contreproductifs et souvent tyranniques, et lui donner une puissance *sui generis* dans son commerce avec les mathématiques en tant que chercheur en didactique. Pour risquer une formule qu'on pourra rapprocher de celles par lesquelles j'ai voulu « croquer » les rapports mathématicien et taupinal, dans le rapport didacticien aux mathématiques, celles-ci sont un ensemble de problèmes *à rouvrir*.

# Troisième période : jusqu'en 1976

## *Chronique 3*

Je suis entré à la rue d'Ulm en octobre 1967, l'année de Mai-68. J'ai passé normalement l'agrégation en 1970. J'avais suivi entretemps divers enseignements de logique mathématique, d'abord à Paris 7 avec Daniel Lacombe, puis à l'IHP avec Jean-Louis Krivine (dont j'avais étudié en détail le *Que sais-je ?* sur la théorie des ensembles). Pendant la quatrième année allouée aux normaliens, j'eus la possibilité de faire, par dérogation, de brefs remplacements en Maths sup. et en Maths spé. au lycée Thiers de Marseille, où j'eus à assurer aussi un cours de logique élémentaire en khâgne, à la demande du professeur de philosophie, Michel Gourinat. À la rentrée 1972, je suis affecté normalement mais tardivement dans le secondaire, dans ce même lycée : on m'y confie une classe de cinquième, une classe de quatrième, une classe de seconde A (qui accueillait des élèves déclarés rétifs aux mathématiques). Je serai en cours d'année recruté comme assistant au département de mathématiques de Luminy, où l'année bat son plein. On m'y propose d'emblée de devenir « animateur » à l'IREM. Dès le mois de février 1972, j'anime un stage de formation au lycée Vauvenargues d'Aix-en-Provence. Les IREM font à l'époque ce qu'on nomme sans élégance du recyclage : il faut « recycler » les professeurs. Ce que demandent ces professeurs ? Au collège, l'alors célèbre « droite affine en quatrième » ; au lycée, les probabilités (que la plupart d'entre eux n'avaient jamais étudiées). Par ailleurs, à l'IREM, je crée et anime un groupe de travail qui prend le nom d'*Atelier « Mathématiques et interdisciplinarité »*. De cet atelier, auquel Alain Mercier participe assidument, sortiront plusieurs « brochures » − selon la terminologie des IREM − dont deux seront réunies par un très actif collègue de l'IREM de Lyon, Maurice Glaymann, pour être publiées chez Cédic en 1977 sous le titre *Deux études mathématiques sur la parenté*. L'une de ces études relevait de la génétique des populations − on y employait notamment la distance de Mahalanobis −, l'autre des « structures élémentaires de la parenté », pour reprendre le titre du maître-ouvrage de Claude Lévi-Strauss paru en 1949. (Lors d'un entretien sur France Culture avec François Le Lionnais, me rapportera un ami, Lévi-Strauss, à qui apparemment rien n'échappait, aura un mot aimable pour ce très mince opuscule.) Une part essentielle de mon travail, cependant, était d'enseigner des mathématiques en maîtrise, où l'on me confia une UV (« unité de valeur ») de topologie, et surtout en DEUG, où de concert avec un collègue, Robert Rolland, j'enseignais les séries. De cela et de quelques autres aventures éditoriales devait sortir en 1979, chez l'éditeur Cédic (qui jouait alors un rôle important dans la noosphère de l'enseignement des mathématiques), allié avec Fernand Nathan, un ouvrage en deux volumes intitulé *Théorie des séries*, dont je signai le premier volume, Robert Rolland signant le second.

## *Ce que j'ai appris 3*

Dans la période qui couvre mon année de 5/2 jusqu'à ma rencontre avec Guy Brousseau, j'ai appris beaucoup, de façon quelque peu erratique. Lorsqu'Alain Connes quitta le lycée Thiers, un an avant moi, il m'abandonna certains de ses livres, dont il estimait n'avoir plus besoin. Il y avait, parmi eux, le volume 3, intitulé *Géométrie*, du *Nouveau cours de mathématiques spéciales* de Georges Cagnac, Edmond Ramis et Joanny Commeau, dont je possédais par ailleurs mon propre exemplaire. Alain y avait mis des annotations manuscrites ainsi que des bristols couverts de sa fine écriture. Au début du chapitre V, « Espaces affines », il avait ajouté une fiche où l'on pouvait lire ce détail : « tous [*sic*] ensemble ayant même puissance que EV peut être muni d'une structure d'EA ». On pouvait en conclure entre autres choses qu'un intervalle de la droite réelle, par exemple ]0, 1[, peut être muni d'une structure d'espace affine de dimension *n*, quel que soit $n \in \angle^*$. Il y avait là un thème qui devait être d'une importance cruciale pour la suite de mon travail.

La logique mathématique me permettait de formuler plus largement le point précédent. Nous sommes habitués à considérer qu'il peut y avoir plusieurs façons de construire une *théorie* $\mathcal{T}$ d'un *système* $\mathcal{S}$, notamment (mais pas seulement) parce qu'il y a plusieurs *langages* $\mathcal{L}$ pour « parler » de $\mathcal{S}$, en sorte qu'il existe en règle générale *plusieurs* théories, $\mathcal{T}_i$, d'un système $\mathcal{S}$. Mais il semble beaucoup plus difficile de concevoir qu'une *même* théorie $\mathcal{T}$ a plusieurs *modèles* $\mathcal{M}_k$ (ce qui est pourtant un fait banal en logique mathématique). Il en résulte alors ceci : lorsqu'on parle d'un certain système $\mathcal{S}$ dans le langage $\mathcal{L}$ d'une théorie $\mathcal{T}$, on croit parler de $\mathcal{S}$ alors même qu'on parle *du même coup* d'une foule d'autres systèmes dont certains nous apparaîtraient, si nous en prenions conscience, comme « bizarres » – qui a jamais regardé l'intervalle ]0, 1[ de 3 comme, disons, un espace affine à trois dimensions ? Sans entrer dans un détail technique qui risquerait de rebuter (même si ces questions sont en vérité passionnantes), j'ajoute que toutes les théories d'un certain type – les théories dites « du premier ordre » –, dès lors qu'elles ont un modèle infini ont des modèles de toute cardinalité (c'est le « théorème de Löwenheim-Skolem »). En particulier, une telle théorie ne peut avoir un modèle unique (à isomorphisme près), de sorte que, en un sens, quand on parle, on ne peut savoir « de quoi on parle » *au juste*.

Dans l'exemple des espaces affines, on passe « simplement » d'un système à un système *équipotent*. Le phénomène de *non-équipotence* des modèles que je viens d'évoquer apparaissait plus encore comme un obstacle à la diffusion des théories « non catégoriques » (dont tous les modèles ne sont pas isomorphes). En préparant l'agrégation, j'avais étudié le livre de Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (1964). L'auteur y proposait une théorie des réels du premier ordre, suffisante, selon lui, pour faire de la géométrie élémentaire. Or il m'était apparu que cette proposition ne pouvait guère être acceptée dans l'enseignement parce qu'on ne peut plus parler alors *du* corps des réels (à isomorphisme près) et qu'on doit en principe évoquer *un* corps des réels. Bien entendu, dans l'enseignement courant, aujourd'hui comme hier, le système des nombres réels n'est pas vraiment défini, mais on fait *comme si*, en en parlant, *on renvoyait à des entités clairement repérées*. Ce « comme si » exprime ce que j'appellerai la contrainte *d'univocité* ou, si l'on veut, *de non-équivocité*. Pour user de formulations familières en mathématiques, cette contrainte impose que, lorsque nous parlons, nous supposions *ipso facto* que ce dont nous parlons *existe et est unique*. C'est là une *contrainte* forte et de haut niveau, que je situerais dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique au-delà même du niveau des civilisations, au niveau de l'espèce humaine, de *l'humanité*. Ces considérations constituaient les prodromes de la théorie de la transposition didactique. Quand une personne ou une institution – et une personne n'est souvent que le porte-parole qui s'ignore d'une institution – nous parle de « quelque chose », entendez d'un système supposé, ce qu'elle dit ne caractérise pas ce système et on est donc en droit, on est même *obligé* de soulever cette question fondamentale : *quelle est cette chose dont on nous parle là ?* Qu'est-elle *au juste* ?

L'expérience du « recyclage » des professeurs allait dans le même sens. Lorsque ceux-ci demandent à l'époque *Qu'est-ce donc que « la droite affine » ?*, ou *Qu'est-ce donc qu'une « probabilité » ?*, et plus généralement lorsque quiconque demande *Qu'est-ce donc que cela ?*, on tient là une interrogation anthropologique indépassable découlant, en l'espèce, de la fragmentation institutionnelle des sociétés humaines. Derrière la résistance des personnes à laquelle se heurtait le travail de « recyclage », j'apercevais des ténacités institutionnelles. Derrière les personnes, je saisissais des institutions auxquelles les personnes demeuraient durement assujetties, même quand elles étaient convaincues de parler en leur nom propre, mues par leurs convictions « personnelles ».

Les années 1960 voient un grand chambardement dans le curriculum mathématique : on passe alors des mathématiques dites « classiques » – qui suscitent, de ce seul fait, un regain de passion chez les réactionnaires de tout poil, si ignorants qu'ils en aient été – aux mathématiques « modernes ». Je dirai aujourd'hui que la période voit une réfection de l'ensemble des *infrastructures* mathématiques de l'enseignement scolaire (et universitaire) des mathématiques. J'appartiens à une génération pour laquelle ce changement fut souvent vécu avec enthousiasme ou, du moins, sans traumatisme. J'ai évoqué plus haut la découverte, en classe de seconde, du livre de Lentin et Rivaud, *Éléments d'algèbre moderne*. En classes préparatoires, je lis régulièrement le *Bulletin de l'APMEP*, qui suit le détail du changement en cours. À la rue d'Ulm, j'étudie les *Éléments de mathématique* de Nicolas Bourbaki. À la Faculté des sciences de Paris, je suis en particulier le cours d'Henri Cartan, qui expose alors la matière de son *Calcul différentiel* et de ses *Formes différentielles*, ouvrages parus chez Hermann en 1967. Or tout ce mouvement se traduit par une redéfinition des notions les plus « communes » de l'enseignement de base. Les angles, notamment, sont au cœur de la tourmente déconstructrice et rebâtisseuse : les anciennes définitions sont mises au rencard, tandis que les nouvelles apparaissent on ne peut plus complexes. Malgré cela, l'adhésion tranquille, qui prévalait jusqu'alors, à des évidences institutionnelles que la patine du temps avait sanctifiées n'est plus de mise.

Depuis mes années en classes préparatoires, et plus encore après, j'ai beaucoup lu dans le domaine des sciences humaines et sociales, notamment en psychologie (Piaget surtout), en sociologie, en ethnologie (Lévi-Strauss en particulier) et dans le champ de l'éducation, où j'avais dévoré entre autres choses les ouvrages de Georges Lapassade. C'est dans son livre *L'entrée dans la vie* (1963), tiré de sa thèse d'État, que j'avais découvert la notion de *néoténie* telle que l'employait l'anatomiste néerlandais Louis Bolk (1866-1930). L'idée historiquement banale de l'inachèvement de l'être humain en découlait aisément. Inachèvement implique indéfinition, flottement, indétermination. Cela rejoignait évidemment les observations associées à l'équivocité fondamentale du langage.

## Problèmes de la profession 3

C'est ici l'occasion de formuler deux questions que je ne justifierai pas plus avant. La première pourrait s'énoncer ainsi : Que faut-il savoir ? Que faut-il apprendre ? (En Math spé. je m'étais un jour aperçu que notre professeur, fort savant à nos yeux, ignorait pourtant l'existence des formules d'Olinde Rodrigues pour les rotations de l'espace.) Je retiendrai une formulation volontairement plus explicite : *Dans l'immense multitude des œuvres qu'un chercheur en didactique peut, en tant que tel, rencontrer à son avantage, quelles sont, à un moment donné, les rencontres obligées ? Les rencontres optimales ? Les rencontres souhaitables ? Dépassant sans les annuler les contingences des biographies singulières et tâchant d'en conserver autant que possible la diversité praxéologique, comment influer en conséquence sur la formation initiale et continuée des chercheurs ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Au plan mathématique, par exemple, ma génération a été confrontée à la reconstruction bourbakiste des mathématiques, rigoureuse et théoriciste, mais aussi, quoique moins frontalement, certes, aux emplois pionniers des mathématiques en sciences sociales et humaines – Lévi-Strauss (1949) avait ainsi collaboré avec André Weil (1906-1998) et Philippe Courrège avait ultérieurement proposé *Un modèle mathématique des structures élémentaires de parenté* (1965).

# Quatrième période : jusqu'en 1990

## *Chronique 4*

J'ai rencontré Guy Brousseau en juin 1976, à l'IREM d'Aix-Marseille (où je travaillais depuis 1972). J'avais alors trente ans révolus. Guy était là pour mettre en place une réplique du DEA de didactique des mathématiques qui existait alors à Bordeaux. J'assistais à cette rencontre pour un motif un peu périphérique : j'y avais été invité au simple titre d'enseignant du département de mathématiques susceptible d'accueillir dans ses cours et TD des étudiants du futur DEA, lesquels viendraient y effectuer des observations « naturalistes ». Je ne me doutais pas de ce qui allait s'ensuivre. Guy et quelques autres « Bordelais » venaient régulièrement à Marseille pour donner les cours du DEA, qu'une petite troupe marseillaise suivait avec passion. Nous allions également à Talence, notamment pour y réaliser des observations de classes. J'entrepris très vite de développer des recherches propres et de diriger des mémoires de DEA. (Comme les plus jeunes lecteurs le comprendront, la normalisation actuelle des usages universitaires, qui est censée, semble-t-il, garantir l'excellence, ou du moins assurer la qualité, n'avait pas encore frappé.) Mes recherches portaient sur l'enseignement des mathématiques au collège ou au lycée, et non à l'école élémentaire, ce qui assurait de fait que nous pourrions ainsi « faire nos gammes » en didactique sans être tout de go confrontés à la norme très exigeante des travaux bordelais. Les deux premiers DEA, ceux d'Odile Schneider et de Jacques Tonnelle, en découlent. À l'IREM, ce sont des années intenses, où la présence de Jean-Louis Ovaert joue un rôle clé (au moins jusqu'à l'arrivée de la gauche au pouvoir en 1981, où il est appelé au ministère). Je bénéficie d'une grande liberté d'accès à un panorama d'œuvres aussi large que possible : la bibliothèque de l'IREM contenait par exemple aussi bien *L'ordre divin* (1979) de Johann Peter Süssmilch, premier traité de démographie (1741), dont la considération n'est pas inutile quand on se préoccupe d'enseignement de la statistique, que les livres de Gregory Bateson, tel l'ouvrage *Vers une écologie de l'esprit* (tome 1, 1977), ou *L'anthropologie du geste* (1974) de Marcel Jousse, qui fut notamment l'élève de Marcel Mauss et fonda en 1932 un « Institut de rythmo-pédagogie ». Au plan national, les didacticiens des mathématiques forment alors une « bande » active, laborieuse, conviviale et, dans mon souvenir, fraternelle. C'est dans cet état d'esprit que je m'engage avec Claude Comiti – au prix de force coups de téléphone entre Marseille et Grenoble – dans la préparation de la première école d'été de didactique des mathématiques, qui a lieu du 7 au 13 juillet 1980 à Chamrousse. Pendant plusieurs semaines, à l'IREM d'Aix-Marseille, je mène de front deux tâches qui me parurent à l'époque assez légères : concevoir et organiser, y compris matériellement, l'école d'été ; et rédiger le cours que je devais y proposer. En 1984, je suis amené à accepter la direction de l'IREM – que je conserverai, faute de candidats, jusqu'à mon départ pour l'IUFM, à la rentrée 1991, comme professeur des universités. Malgré cela, je dispose alors d'une grande liberté, et cela pour plusieurs raisons, puisqu'il est bien des façons pour un chercheur d'aliéner sa liberté. Plusieurs d'entre nous n'ont alors aucun « plan de carrière ». À vrai dire, on pouvait à l'époque demeurer assistant à vie. Ce qui m'importait et m'importe toujours par-dessus tout, c'était de travailler, de faire de la didactique, de faire reconnaître la didactique comme science nouvelle. Un ami physicien aujourd'hui disparu, qui avait en sympathie les didacticiens, me dit un jour, dans ce qu'il crut être un accès de lucidité et qui était un excès de pessimisme, songeant à moi-même et à quelques autres, dont Guy

Brousseau : « Vous ne deviendrez jamais profs… » Tous les didacticiens, certes, n'avait pas l'innocence qu'il nous prêtait. Mais, comme sans doute quelques autres à l'époque, je travaillais intensément à un projet scientifique collectif, sans visée personnelle. Je n'ai ainsi jamais songé à faire une thèse − la thèse d'État, au reste, allait cesser d'exister du fait de la loi Savary de 1984. Lorsque l'idée m'en est venue − il s'agissait de la thèse nouveau style −, le Doyen de la Faculté des sciences de Luminy, à qui j'en parlais fortuitement dans un ascenseur, me dit : « Mais tu ne vas pas faire une thèse ! C'est ridicule. Passe ton habilitation ! » Ce que je ferai en 1990, avec (entre autres) Alain Connes dans le jury.

## *Ce que j'ai appris 4*

### *Théorisations en didactique*

Ces quinze années furent une période florissante, où se loge une part essentielle de ma vie de chercheur. J'ai appris d'abord et surtout la théorie des situations didactiques (TSD). À partir de 1976, nous fûmes littéralement plongés dans la TSD, théorie déjà très riche à l'époque mais où des avancées se produisaient sous nos yeux mêmes. C'est ainsi qu'un jour où, à quelques-uns, nous arrivions à l'école Jules-Michelet, Guy nous prévint abruptement : « Il y a une quatrième dialectique ! » Après les dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, il venait d'introduire la dialectique de l'institutionnalisation.

J'appris bien sûr à voir et à interroger les phénomènes de transposition didactique. Les institutions et les personnes qui leur sont assujetties, qui ont l'air de savoir ce dont elles parlent, et en vérité qui ont l'air de *savoir*, tout court, de quoi parlent-elles au juste ? Et que savent-elles en vérité ? Lorsqu'un professeur dit à un autre « Ce matin, je leur ai fait $a^2 - b^2$ » et que son interlocuteur a l'air de comprendre de quoi il s'agit, *de quoi s'agit-il au juste ?* Qu'ont donc réellement rencontré les élèves ? Auront-ils rencontré par exemple une égalité aussi simple que $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$ ? Que sont-ils censés avoir appris à faire ? (Il y avait là, en germe, la notion d'*écologie des savoirs* qui devait être développée notamment dans la thèse soutenue en 1988 par Landy Rajoson sous le titre *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*.) La clé de l'énigme tenait en deux assertions. D'abord, les « savoirs » qu'on observe dans l'enseignement, tel « $a^2 - b^2$ », n'ont en règle générale pas été produits là où on les observe et viennent donc *d'ailleurs*, ce phénomène tenant en particulier à ce que ceux qui les enseignent n'ont pas l'autorité, la légitimité pour enseigner des savoirs *dont ils seraient les producteurs*. Ensuite, le savoir observé diffère du savoir premier, « légitime », vivant « ailleurs », dont il procède, et cela parce que, dans le système d'enseignement, jouent des conditions et des contraintes *autres* que celles sous lesquelles ces savoirs sont originellement venus à l'existence.

J'appris encore le débat au sein d'une communauté scientifique et, d'abord, ses aléas. Le cours de Chamrousse fut publié en 1985 aux éditions La Pensée sauvage de Grenoble. Matériellement, l'ouvrage comportait une ambiguïté que releva sévèrement Hans Freudenthal dans le compte rendu qu'il en donna dans *Educational studies in mathematics* : la couverture portait le titre *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* ; mais, passé le sommaire, une nouvelle page offrait cette variante : *La transposition didactique. Des mathématiques savantes aux mathématiques enseignées*. On pouvait voir en ce *lapsus calami* une négligence fâcheuse. L'erreur éditoriale n'était pourtant pas dénuée de sens. Car une théorie scientifique ne saurait être une théorie *ad hoc* : pour prouver sa validité − même si cela n'est pas suffisant, certes − elle doit prétendre à rendre raison d'un univers d'objets très vaste. La théorie de la transposition didactique devait être une théorie de la transposition *des savoirs*, et pas seulement des savoirs *mathématiques*. On voit qu'il y avait là d'emblée une pierre d'achoppement, qu'on peut subsumer sous la notion plus large de *dialectique du spécifique et du générique*.

### *Réceptions déformantes : transposition didactique et savoir savant*

Dans la première année du DEA « marseillais », nous eûmes le plaisir intellectuel et humain à la fois d'entendre Michel Brossard, psychologue spécialiste du développement, à la parole pesée, et qui collaborait avec Guy à Bordeaux. D'une chemise contenant divers feuillets dont il s'aidait pour faire son cours, il sortit une feuille ne comportant que quelques lignes empruntées à un sociologue qui m'était alors inconnu, Michel Verret (né en 1927), où l'expression « transposition didactique » figurait explicitement. Je reconnus la parenté de ce que l'auteur cité pouvait désigner ainsi avec les phénomènes au centre de mes préoccupations d'alors. J'appellerais donc transposition didactique le processus – à étudier – par lequel on passe d'un savoir d'origine à un savoir enseigné. Michel Brossard m'avait sans le savoir transmis un message jamais envoyé et je m'étais trouvé là pour le recevoir : il y a ainsi d'étranges rendez-vous, que nul n'a fixés, et qui n'en sont pas moins décisifs. Mais il arrive que ce qui commence bien dérape ensuite : je découvris plus tard que, selon un procédé que Nietzche aurait peut-être qualifié d'*histoire d'antiquaire*, d'aucuns attribuaient la paternité de ce que j'avançais à Michel Verret lui-même (lequel, me glissa-t-on, en fut amusé), ce qui avait pour principal démérite de brouiller la réception de la théorie.

J'appris donc, du même mouvement, le phénomène de *réception déformante*. Chacun voit midi à sa porte : à la notion – et à l'expression – de *savoir savant*, d'aucuns prétendirent substituer (ou ajouter) celles de « savoir de référence », de « savoir expert », etc. Bien que désuet, le qualificatif *savant* ne semblait pas faire problème dans le cas des mathématiques : chacun convenait que, des savoirs mathématiques, il existe une forme « savante », celle associée aux mathématiciens producteurs de mathématiques. Mais très vite après la publication du livre, je fus interpellé par des collègues de diverses disciplines : où est le « savoir savant » en EPS, en français, en anglais par exemple, demandaient-ils ? Je mis un peu de temps à comprendre ; et ce sont les enseignants de l'UFR STAPS de l'université où je me trouvais alors (depuis 1972) qui me permirent de mieux saisir le problème. Où est donc le savoir « savant » en matière de football ou de cyclisme ? (Je parle là des sports de compétition.) Pour éprouver un peu plus mes interlocuteurs, que je voyais déconcertés, je répondais en choisissant d'incarner ces « savoirs savants » en des professionnels reconnus, certes, mais de réputation intellectuelle un peu terne : le savant en vélo, disais-je donc, c'est Poulidor (Raymond), en football, Papin (Jean-Pierre). Leur surprise n'eut alors d'égale que celle que j'éprouvai moi-même quand je compris que, à leurs yeux, les « savants » en matière de sports, *c'était eux*, enseignants et enseignants-chercheurs des UFR STAPS de France et de Navarre. Or il ne pouvait y avoir pire méprise. Pour la théorie de la transposition didactique telle que je l'avais élaborée, Picasso (Pablo) était un savant en matière de peinture, Flaubert (Gustave) en matière d'écriture romanesque, Noureev (Rudolf) en matière de danse, Prost (Alain) en matière de courses automobiles et Albaladejo (Pierre) en matière de drop (au rugby).

Deux obstacles arrêtaient sur ce point la réception de la théorie. Comme bien d'autres, ces collègues confondaient les « savoirs *de* » (la danse, la peinture, la natation, etc.), qui sont des savoirs consubstantiels à la pratique de haut niveau de ces arts, et les « savoirs *sur* » (la danse, la peinture, la natation, etc.), dont l'archétype est « l'histoire de », et qui peuvent certes modifier l'écologie et l'économie des « savoirs de » mais ne sauraient être a priori identifiés à eux. (Nombre de mathématiciens fort « savants » ne sont pas des savants en histoire ou en philosophie des mathématiques, sans parler de didactique des mathématiques.) Eux étaient peut-être des savants en quelque savoir relatif à telle activité sportive mais, sauf exception, ils n'étaient pas des savants en la matière, c'est-à-dire des « sportifs de haut niveau ». « Savant » est historiquement, en français, le premier participe présent du verbe *savoir* : un savant est un « sachant », quelqu'un qu'on regarde comme nourrissant son action d'un savoir qui est seul jugé susceptible d'expliquer ses hautes performances – footballistiques, musicales, mathématiques ou autres.

En théorie de la transposition didactique, et à plus forte raison en théorie anthropologique du didactique, une définition se réfère par principe à *l'ensemble des activités humaines* : c'est là une caractéristique de l'abord *anthropologique* en didactique, où l'on doit autant que possible se déprendre des valeurs culturelles, des visions institutionnelles d'un monde social fragmenté et polémique. Cette extension « anthropologique » des notions n'allait pas de soi pour tout un ensemble de raisons, certaines superficielles, d'autres plus profondes : voilà ce que j'appris encore. Un commentateur de télévision, ancien joueur de tennis de haut niveau, évoquait récemment, à propos de deux joueuses engagées dans le tournoi de Wimbledon, combien profonde était, à ses yeux, la « science de la terre battue » de ces jeunes femmes, c'est-à-dire combien elles étaient *savantes* en matière de tennis sur terre battue. Mais la réception d'un tel exemple (comme de ceux qui précèdent) est gênée par un obstacle des plus redoutables. L'adjectif « savant », en effet, fait résonner une note laudative : le « savant », en ce sens, impose le respect, convainc de la valeur et de la force du savoir dont procèderaient ses performances, savoir qui, bien que seulement inféré (il correspond plus ou moins à la compétence chomskyenne), est tenu pour une valeur assez rare pour apparaître précieuse. Mais voilà ! Nous ne sommes pas tous d'accord quant à la reconnaissance de tels savoirs. Pour beaucoup, là où d'aucuns imaginent la présence d'un savoir, d'autres ne voient rien de tel : le coureur cycliste qui franchit en vainqueur un col le fait-il grâce à un savoir supérieur ou à une bonne paire de jambes ? La note laudative laisse alors place à une péjoration altière : il n'y a pas là trace de savoir, diront certains, et le champion de haut niveau n'est en rien un savant ! Bref, la reconnaissance de sa « savance » (pour employer un mot d'ancien français) fait défaut. Il résulte de tout cela que, plus de trente ans après le cours de Chamrousse, le concept de savoir savant n'est toujours pas reçu dans son exacte signification. Tout cela fait que n'est toujours pas compris un point fondamental de la théorie de la transposition didactique : lorsque le plus haut savoir supposé en un domaine d'activité donné au sein d'une société donnée *n'y est pas regardé comme « savant »*, alors l'enseignement de ce « savoir à enseigner » ne saurait s'autoriser pleinement de ce plus haut savoir et doit rechercher le parrainage d'autres « autorités », par exemple du métier lui-même (et non pas du savoir qui le fait tenir), ce qui oblige à des contorsions coûteuses et souvent contre-productives.

### *Les effets d'une rupture épistémologique inaccomplie*

J'appris aussi durant cette période que la rupture épistémologique qui rend possible l'émergence d'un champ scientifique était, en didactique, encore peu avancée. Dans l'enseignement scolaire, tout se passe comme si le professeur disait aux élèves (et, au-delà d'eux, à la société), à propos du savoir enseigné : « Vous pouvez me croire, *parce que ce n'est pas de moi !* » Cette situation faite à ces acteurs essentiels de la diffusion scolaire des savoirs, qui les fait apparaître *officiellement* comme n'étant pas les *producteurs* des savoirs qu'ils enseignent, a eu des conséquences non négligeables sur l'épistémologie des chercheurs. Quand vous n'êtes pas producteur d'un savoir, vous n'avez pas à défendre ce savoir : il y a pour cela de supposées *autorités*, qui vous autorisent *par avance*, et cela même en mathématiques, où le professeur est, il est vrai, censé « défendre » un théorème en en donnant une démonstration mais n'a pas traditionnellement à défendre la démonstration elle-même – celle-ci étant censée être justifiée par la « lumière naturelle », pour parler comme Descartes. Pour cela, avoir à défendre une assertion qu'aucune autorité ne défend pour vous par avance, comme il en va par nature dans la recherche, devient alors une situation inconfortable pour des chercheurs encore assujettis à l'épistémologie des professeurs. De là qu'ils recherchent des prédécesseurs, auxquels on aurait emprunté en tapinois la matière de son propos. De là aussi qu'ils professent une éthique « méthodologique » étroite, qui rejette tout rapport à la contingence engageant plus profondément la responsabilité épistémologique du chercheur. Je pense à cet égard à l'incapacité persistante d'assumer le travail que j'appelle *clinique*, mené en synchronie comme en diachronie, cela à *tous* les niveaux de l'échelle de codétermination didactique (le niveau de l'école aussi bien que celui de la société, par exemple), qui est le socle ou, si l'on peut dire, le *camp de base*, de *tout travail possible en tout champ scientifique*.

De cette rupture épistémologique en souffrance découlait aussi, et d'un même mouvement, cette plaie de la vie scientifique *réelle* : l'insuffisance, *en quantité et en qualité*, du travail réalisé pour recevoir *en pair* le travail d'autrui – et non comme un professeur brutal recevant le travail d'un élève qu'il juge a priori insuffisant et fautif. Autour de 1980, j'avais avancé ce qui m'apparaissait cliniquement comme bien attesté : *l'algèbre élémentaire est un savoir culturellement péjoré*, à le comparer en premier lieu au savoir géométrique. Or c'était là une assertion d'un type qui répugnait à certains, comme si j'avais déclaré que l'algèbre est bleue ou que les équations du second degré sont libidineuses. Cette assertion soulevait, certes, deux questions parfaitement légitimes : l'algèbre est péjorée, dites-vous, mais péjorée *par qui* ? Et puis bien sûr : quelle que soit la réponse à la question précédente, comment *l'établissez-vous ?* Dans les objections à l'endroit de cette « thèse », je continue de voir d'abord, hélas !, une forme d'attitude « politiquement correcte ». Si l'on concède que les différentes parties des mathématiques enseignées ne sont pas également valorisées, où s'arrêtera-t-on ? Si l'on affirme que telle partie du curriculum est dépréciée, cela peut être dommageable aux professeurs, aux élèves, à leurs parents même, et finalement à l'enseignement des mathématiques. Or le problème est que, dans une approche anthropologique des faits didactiques (et des conditions et contraintes qui les gouvernent), une telle condition supposée – la péjoration de l'algébrique – *ne peut être ignorée*, car, sans même qu'ils en aient conscience, elle change réellement la situation de l'élève, du professeur et de chacun. La péjoration d'un objet, ainsi, est corrélée ordinairement à l'affirmation de la *facilité* de l'usage de cet objet. (Ainsi en va-t-il par exemple aujourd'hui s'agissant de l'Internet : voir Ladage & Chevallard 2011.) Cela conduit en règle générale à deux grandes conséquences solidaires : tout d'abord, on *étudie insuffisamment* l'objet ainsi déclaré « facile » d'emploi, si bien que, en pratique, on le connaît peu, et mal ; ensuite, et par voie de conséquence, on n'utilise guère l'objet que dans *des usages stéréotypés « faciles »*, ce qui, bien évidemment, conforte le verdict initial de « facilité ». Lorsque, d'aventure, un emploi plus « difficile » est tenté – sans succès –, on déclarera que l'objet péjoré est « incapable » d'un tel emploi. Ainsi en va-t-il avec le calcul algébrique élémentaire, dont les usages scolaires restent limités et ne permettent guère, par exemple, de développer une culture de l'*anticipation* et du *contrôle* dans le travail mathématique, ce qui conduirait par exemple à *prévoir* que, si l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a une racine positive, celle-ci est supérieure à 1, parce que l'égalité $x^2 - x - 1 = 0$ implique que l'on a aussi $x = 1 + 1/x$.

### *Une culture commune à construire*

La médiocrité du débat « scientifique » tenait et tient toujours, me semble-t-il, d'abord à un manque de *culture commune* de la communauté des chercheurs. Rappelant récemment que le mot d'algèbre fut pointé à son introduction en Occident comme « ne signifiant rien dans les langues européennes », je fus « mouché » par un *referee* anonyme qui objecta que bien d'autres mots, tel *magasin*, nous sont venus de l'arabe sans inconvénient apparent pour eux. Ce collègue, qui aurait dû agir en *pair* – dans le cadre de ce qui est en principe une *peer review*, et non un exercice de *bullying* – et qui aurait dû entendre que je parlais du mot d'algèbre *et non d'un autre*, ne connaissait-il pas, *par exemple*, ce passage où l'historien des mathématiques David Eugene Smith (1925/1958, p. 392) note que Viète « rejected the name "algebra" as having no significance in the European languages, and proposed to use the term "analysis," and it is probably to his influence that the popularity of this term in connection with higher algebra is due » ? Il aurait dû. Pour travailler efficacement ensemble, il faut – comme dans une classe scolaire ordinaire – *savoir ensemble*, *ignorer ensemble* et *apprendre ensemble* ; et, par là, il faut savoir à un moment donné ce que chacun d'entre nous ou presque sait et ce que chacun d'entre nous ou presque ignore. Le contraire de cette indispensable solidarité épistémologique s'incarne dans la figure culturellement bien connue de Monsieur Je-sais-tout – l'allemand l'appelle *Besserwisser*, « qui sait mieux », l'anglais *know-it-all* ou *know-all*, l'espagnol *sabelotodo*, « qui sait tout », etc. Cette figure semble avoir, chez les didacticiens des mathématiques, une origine *sui generis*. Car celui qui sait, dans l'univers scolaire, c'est le professeur, qui, dans l'état historique *actuel* du métier, est, face aux élèves, condamné à savoir et doit renoncer à tout aveu d'ignorance. (Bien entendu, comme d'autres, j'ai été marqué par l'expérience d'un professeur dont des signes objectifs nous disaient qu'il était fort savant et qui, pourtant, n'hésitait pas à nous dire son ignorance sur tel ou tel point.) L'interdit d'ignorer pèse tyranniquement sur la vie des classes. La manière de participer au débat qu'adoptent encore trop de chercheurs en didactique est souvent l'écho de cette contrainte caractéristique du régime scolaire actuel du savoir et de l'ignorance. Il me semble donc que la source proche du *know-it-all-ism* des didacticiens, de leur *adultisme*, selon une terminologie que j'ai tôt employée, se trouve à nouveau dans une *insuffisante rupture avec la figure du professeur*.

Dans l'approche anthropologique du didactique, il convient de prendre en compte des faits de niveaux très différents : faits de civilisation, de société, d'école, de pédagogie ; et, s'agissant des personnes elles-mêmes, des faits psychologiques (au sens large du terme). Dans chaque cas, les « sciences » qui ont le monopole de tels faits peuvent être utiles au didacticien et il convient donc de les consulter, même si la chose se révèle souvent décevante car la question que, du fait de ses propres travaux, le didacticien est conduit à leur poser n'a guère de chances d'y avoir été posée et d'y avoir reçu réponse. Mais de telles fréquentations ramènent ordinairement des matériaux à partir desquels le didacticien peut espérer articuler une réponse à la question que lui pose sa recherche. J'appris cependant que ces données incontournables de la vie du chercheur posent deux ordres de problèmes. Quel que soit l'apport espéré, la fréquentation de ces sciences « contributives » exige des lectures nombreuses et diverses et une information régulièrement renouvelée. Un tel travail ne peut se réduire à la consultation assidue de quelques livres-fétiches qu'on s'entendrait pour sacraliser. Pour ne donner ici qu'un exemple, si, en certains domaines de la didactique des mathématiques, il est au moins utile d'avoir en tête la notion de *proof-generated concept* introduite par Imre Lakatos dans *Proofs and refutations* (1976, p. 89), il n'est pas inutile de connaître l'article de Solomon Feferman (1981) intitulé *The logic of mathematical discovery versus the logical structure of mathematics* (Feferman 1998, pp. 77-93), où les thèses lakatosiennes sont discutées. J'ajoute à cela que le chercheur doit se nourrir même de mauvais livres et d'articles médiocres, qui peuvent cependant l'alerter sur l'existence de telle ou telle ressource peut-être utile. Je crois que notre communauté n'a qu'à gagner à une ouverture large sur les productions contemporaines et anciennes dans une foule de domaines *qu'il n'est pas possible de circonscrire à l'avance*. La connaissance utile est souvent connaissance *à venir*, à découvrir ou à créer : elle ne saurait être identifiée d'avance sans coup férir.

Second commentaire annoncé : quel que soit le prix qu'il accorde aux apports possibles de tel champ de connaissance, le chercheur ne doit pas s'inféoder à ce champ et aliéner sa liberté en reprenant à son compte les contraintes qui y prévalent, comme s'il désirait s'y voir reconnu en tant que bon et loyal sujet. Ces contraintes, quand elles ne se révèlent pas superfétatoires, permettent sans doute d'être bien vu – et peut-être productif – dans le champ concerné, qu'il s'agisse de psychologie, de sociologie, de linguistique, d'histoire, etc. Mais elles risquent fort de n'être pas véritablement compatibles avec les contraintes imposées par l'objet d'étude propre du chercheur. Et, à plus forte raison, il ne convient donc pas que celui-ci cherche, ouvertement ou subrepticement, à les imposer à ses pairs.

### *La théorie des rapports et l'appel aux renoncements ostensifs*

Dès le cours de Chamrousse, il avait fallu employer un vocabulaire en partie spécifique et des notations inédites. La chose est banale dans les sciences ; mais elle apparaissait là suspecte, sinon interdite. J'ai vite appris qu'un chercheur ne doit pas accepter les invitations répétées à se soumettre à la *doxa* ambiante et au langage de la tribu tel qu'il est. On n'imagine pas un étudiant disant au professeur qui vient de donner la définition mathématique de la notion de groupe que, *pour lui*, un groupe, « ça n'est pas ça », que la notion emporte avec elle une nuance de convivialité, de chaleur qu'il ne retrouve pas dans la définition donnée. Or cela est présent en didactique depuis le début.

La théorie des rapports, élaborée dans les années 1980, en fournirait quelques exemples. L'époque était marquée par le mot d'ordre constructiviste : l'élève, disait-on, « construit son savoir ». Ce slogan me parut contestable à plusieurs égards. Tout d'abord, je rejetais des expressions comme « le savoir *de* l'élève », le « savoir *du* professeur », etc. J'avais parlé de savoir à enseigner, de savoir savant, non du savoir de telle institution ou de telle personne. Le savoir transposé *en une institution* (la notion de transposition didactique s'était élargie en la notion de transposition *institutionnelle*) est une réalité associée à l'institution, dont celle-ci nourrit son action. On peut certes vouloir décrire cette réalité ; mais on ne l'observe qu'à travers les *rapports* qu'ont avec elle les différents types de sujets de l'institution. Encore ces rapports ne peuvent-ils être observés qu'incomplètement à partir d'une *position* donnée dans l'institution ou dans ses entours, chaque position découpant dans le rapport observé une part « publique » (visible) et une part « privée » (invisible). Un individu n'a pas « un savoir » comme il a un bras ou une jambe, mais un rapport à un savoir supposé. Plus largement, étant donné un objet $o$, un individu $x$ a un rapport *personnel* à cet objet, que je notai $R(x\,;\,o)$. Ce rapport avait quelque chose du rapport « idéal » à l'objet $o$ que sont censés avoir, dans l'institution $I$, les sujets de cette institution $I$ qui viennent y occuper la position $p$ : le rapport institutionnel à $o$ pour les sujets en position $p$ dans $I$, que je notai $R_I(p\,;\,o)$. Si, par exemple, l'objet $o$ est « la fonction logarithme népérien », notée usuellement ln, il existe à un moment donné, dans l'institution qu'est une classe de terminale scientifique, $TS$, un rapport institutionnel pour la position d'élève, ε, à savoir le rapport institutionnel $R_{TS}(\varepsilon\,;\,\ln)$, et un rapport institutionnel pour la position de professeur, π, à savoir le rapport institutionnel $R_{TS}(\pi\,;\,\ln)$. Ce second rapport comporte bien sûr des éléments relatifs au fait que le professeur doit *enseigner* l'objet $o = \ln$, c'est-à-dire que l'objet ln est pour les sujets en position π un objet *à enseigner*, éléments que ne comporte pas le rapport $R_{TS}(\varepsilon\,;\,\ln)$, qui intègre, lui, des éléments relatifs au fait que l'objet ln est pour les sujets en position ε un objet *à apprendre*, en sorte que, si l'intersection des rapports $R_{TS}(\varepsilon\,;\,\ln)$ et $R_{TS}(\pi\,;\,\ln)$ n'est certes pas vide, on ne saurait avancer que le second inclut le premier, que $R_{TS}(\pi\,;\,\ln)$ est « plus riche » que $R_{TS}(\varepsilon\,;\,\ln)$ *à tous égards*.

La formule « l'élève construit son savoir » pouvait alors subir une première transmutation ; elle devenait : « l'élève construit son *rapport* au savoir ». Une seconde transformation apparut en même temps nécessaire : l'élève ne construit pas son rapport au savoir, ce rapport *se construit* et l'élève peut *contribuer* à cette construction, qu'il ne maîtrise pas complètement. Mais la formule « l'élève contribue à construire son rapport au savoir » comportait une ambiguïté que, pour ma courte honte, je n'ai jamais réussi à dissiper : on y voit apparaître le syntagme « rapport au savoir » qui, sous d'autres plumes − celle notamment de Jacky Beillerot − fit bientôt florès en sciences de l'éducation. Pour moi, « le savoir » était un objet *o* parmi d'autres, que je notais ironiquement \$, et on pouvait donc parler des rapports personnels $R(x\ ;\ \$)$ ou des rapports institutionnels $R_I(p\ ;\ \$)$. Mais à tel « savoir » déterminé, disons l'algèbre élémentaire, *a*, existaient *de même* des rapports personnels $R(x\ ;\ a)$ et des rapports institutionnels $R_I(p\ ;\ a)$ ; et il en allait ainsi pour tout objet *o* possible. Il semble que, du fait du succès de la notion de rapport au savoir (à laquelle est consacré aujourd'hui un article de *Wikipédia*), la réception de cette théorie se soit accompagnée d'une atrophie de la conceptualisation proposée.

Les notions de rapport personnel et de rapport institutionnel allaient de pair avec deux ou trois autres notions clés pour parler des « sujets ». Tout d'abord la notion d'institution, que j'ai déjà utilisée ; ensuite, celle de *personne* ; enfin celle d'*assujettissement* d'une personne à une institution. Une personne n'existe que par ses assujettissements institutionnels : elle est à chaque instant la résultante d'un *nexus* d'assujettissements. Bien entendu, le mot d'assujettissement fut reçu trop souvent au sens du français commun. Contre cela, j'ai dû souligner que nos assujettissements sont le moyen − et l'unique moyen − de notre *puissance*. (Une chaîne de vélo, disais-je, ne sert à rien si elle n'est pas adéquatement assujettie au pédalier.) J'ai insisté aussi sur ce fait que la *liberté de la personne* consistait à se délivrer d'assujettissements installés, voire indurés, en se donnant à de *nouveaux* assujettissements. Mais en quoi consistent alors ces assujettissements qui « font » la personne ? Un individu *x* traverse depuis sa naissance une foule innombrable d'institutions $I_k$, où il occupe une suite de positions $p_k$. Il est ainsi assujetti à une foule immense de rapports $R_{I_k}(p_k\ ;\ o)$, qui contribueront à la construction de ses rapports personnel $R(x\ ;\ o)$. La personne est regardée ici comme l'*émergent* du système complexe, évolutif des rapports personnels de l'individu.

La réception de la théorie ne pouvait pas être simple : elle supposait ascèse ostensive et renoncement aux à-peu-près verbaux. Les « formules » qu'elle contenait devaient aider − et aident effectivement − qui *ose* les employer. Lors d'une école d'été, présentant ce qui était à ses yeux les différences entre recherches américaines et recherches françaises en matière de *mathematics education*, Jeremy Kilpatrick montra à l'auditoire, d'une manière plutôt neutre, des « formules » du type $R(x\ ;\ o)$, $R_I(p\ ;\ o)$ ou peut-être encore $R(x\ ;\ R(x\ ;\ o))$, ce qui désigne le rapport de *x* à son propre rapport à *o*, en ajoutant que, cela, on ne le voyait pas dans la littérature d'outre-Atlantique. On n'était pas loin de l'idée d'une possible censure, à ceci près que, à l'évidence, la personnalité du conférencier ne le portait guère à ce genre de choses.

### De la théorie des rapports à la théorie praxéologique

À l'instar de la théorie de la transposition didactique des savoirs, la théorie des rapports personnels et institutionnels avait un grand degré de généricité. Elle était indispensable pour penser le sujet d'une manière qui ne fût pas « mentaliste », qui donnât à voir les ressorts de l'action du sujet et leur genèse au lieu de les imaginer stockés quelque part dans son « esprit ». En 1989, quand je commence à diriger le travail de thèse de Marianna Bosch (elle devait soutenir sa thèse en 1994), une lacune pourtant est patente dans ce qui deviendra la théorie anthropologique du didactique : elle concerne *l'origine du contenu* des rapports à un objet *o*. Pourquoi par exemple ce rapport à la fonction logarithme chez ces personnes, et cet autre rapport chez d'autres personnes ? La réponse est en essence la suivante : le rapport de *x* à *o* est engendré par tout ce que *x fait* ou *a fait* avec *o* dans toutes les institutions où *x* a rencontré l'objet *o*. Dans le même temps, le besoin se faisait sentir de préciser ce qu'est, dans la formule par laquelle je désigne aujourd'hui un système didactique, à savoir $S(X\ ;\ y\ ;\ ♥)$, l'enjeu didactique ♥. Il y avait bien sûr la notion de savoir − cet enjeu ♥ serait un « savoir » −, mais, dans une perspective anthropologique, cette notion s'avérait limitative dans un monde où non seulement le titre de « savoir savant » est chèrement disputé, mais où même le titre de (simple) savoir ne s'accorde pas si facilement. Se moucher suppose-t-il un savoir ? Et descendre un escalier ? À ces questions, il fallait à l'évidence répondre *oui*, alors même que toute une société en refusait l'augure avec un joli mouvement du menton.

Tout cela conduisit à la notion de *praxéologie* : toute action humaine est faite de l'exécution de tâches de différents *types*, à chaque *type* de tâches $T$ est associée au moins une *technique* $\tau$, chaque technique requiert (de façon latente en général, qui devient manifeste sous certaines conditions) un discours justificatif et générateur d'intelligibilité que j'appelai une *technologie*, *la* technologie de la technique $\tau$, que je notai par la lettre $\theta$. Enfin, au-dessus de ces trois niveaux, figurait la composante théorique, la *théorie*, $\Theta$, qui justifiait, voire imposait $\theta$ et, par son entremise, $\tau$. On arrivait ainsi à un quadruplet noté $[T / \tau / \theta / \Theta]$, qui était *une* praxéologie. Dans cette entité, il y avait un premier bloc, la *praxis* $[T / \tau]$, et un second bloc, le *logos* $[\theta / \Theta]$ ; et l'on pouvait écrire quelque chose comme $[T / \tau / \theta / \Theta] = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta]$. Retrouvant la langue courante, on pouvait aussi, grosso modo, identifier d'une part *praxis* et « savoir-faire », d'autre part *logos* et « savoir ». La transposée $[T / \tau / \theta / \Theta]^t$ de la praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$ d'une institution dans une autre pouvait s'écrire $[T / \tau / \theta / \Theta]^t = [T / \tau]^t \oplus [\theta / \Theta]^t$ et offrir de nombreuses variantes. On pouvait notamment avoir, à la limite, et pendant un temps au moins, $[\theta / \Theta]^t = \varnothing$ (un savoir-faire « nu », en attente d'un « savoir » le justifiant et l'expliquant), ou, plus fréquemment encore peut-être, $[T / \tau]^t = \varnothing$ (un savoir en attente d'emploi). Cette notion permettait un regard acéré sur les connaissances à apprendre et à enseigner : loin d'être une notion spéculative (ou contemplative), elle allait jouer un rôle actif dans la suite des choses.

Pour faire bonne mesure, j'ajoute que, fouillant les débarras de l'histoire, d'aucuns me cherchèrent un prédécesseur en matière de praxéologie. L'un de ces érudits d'occasion, qui n'est pas de notre tribu, écrira sans sourciller que j'aurais tiré cette notion de l'œuvre d'un auteur, Alfred Espinas (1844-1922), dont je n'avais à l'époque jamais entendu parler et qui, bien entendu, ne donnait pas au mot de praxéologie le sens qu'il a en TAD. Mais là, je n'appris rien qui vaille ; je savais déjà tout.

## Problèmes de la profession 4

Telles que je les perçois, les conditions du travail scientifique en didactique des mathématiques ont été marquées depuis toujours, *et jusqu'à aujourd'hui*, par deux carences solidaires : un *débat scientifique* trop peu approfondi, gêné par une *culture commune* trop étroite et demeurée insuffisamment travaillée. Une contrainte commande ces conditions : l'insuffisance de la rupture épistémologique avec la culture du métier de professeur – métier qu'il s'agit sans doute d'étudier, non de singer. Une première question en découle : *Comment la communauté des chercheurs peut-elle assumer l'indépassable spécificité de ses rapports aux outils de la recherche, en particulier à la création endogène d'œuvres (par contraste avec l'importation d'œuvres allogènes toutes faites) et, plus largement, à la déconstruction de rapports ailleurs dominants mais inadéquats au travail du didacticien ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Je réserverai en outre une question spéciale à la grande affaire du débat scientifique et en particulier aux difficultés d'une *peer review* qui, trop souvent, ne mérite pas ce nom : *Comment la communauté des chercheurs peut-elle organiser un débat scientifique informé, studieux, voire laborieux, et donc rigoureux, non déformant, bienveillant et pertinent à la fois, enfin dépourvu d'angles morts – grâce, par exemple, à l'adoption des normes exigeantes de l'*open peer review *? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Je complète enfin ces interrogations par celle-ci : *Comment élaborer une culture commune indéfiniment ouverte, au service de la recherche, qui répudie notamment tout « catéchisme » limitatif et apporte en* *même temps les aides utiles aux chercheurs pour partager le trésor évolutif de connaissances rassemblé activement par leur communauté ? Que comptez-vous faire à cet égard ?*

# Cinquième période : jusqu'en 2000

## *Chronique 5*

J'ai travaillé à l'IREM d'Aix-Marseille depuis le début de l'année civile 1972 jusqu'à la rentrée universitaire 1991, quand s'est ouvert l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille où j'avais été nommé comme professeur des universités. L'année 1990-1991 avait été occupée, non sans enthousiasme, à penser l'IUFM à venir. J'avais beaucoup appris à l'IREM, dont j'étais le directeur depuis 1984. (Je fis dans ces fonctions plus que mon temps : à la fin des années 1980, en effet, personne ne voulait être directeur et j'eus toutes les peines du monde à me trouver un successeur, sur qui j'organisai inamicalement de fortes pressions amicales pour qu'il accepte l'offre qui lui était faite.) J'espérais que certaines contraintes que j'avais rencontrées jusque-là pourraient être levées à l'IUFM. Or j'y rencontrai d'abord des contraintes négatives nouvelles, qui n'existaient pas à l'IREM. Ainsi n'y avait-il pas de vraie bibliothèque, mais une « médiathèque » sur le modèle des CDI du secondaire, conçue pour les élèves professeurs de l'IUFM, non pour leurs formateurs, fussent-ils enseignants chercheurs de métier. J'ajoute à cela un autre contraste avec l'IREM que je venais de quitter, qui n'était qu'un symptôme, certes, mais fort déplaisant : téléphoniquement, à l'IUFM, nous n'avions pas droit à l'international ! Cette décision du directeur, qui participait clairement de l'univers du secondaire, était handicapante pour faire de la science ; mais l'IUFM était-il un lieu où l'on devait faire de la science ? La réponse de l'institution – du ministère, tout le premier – était clairement *non*.

Il y avait aussi, bien sûr, des contrastes positifs. Je pris d'emblée la direction de la filière « Mathématiques », où l'on formait les professeurs de mathématiques des collèges et lycées, les PLC comme on disait en nombre d'IUFM, les PCL comme nous disions à Marseille. À l'IREM, je m'étais convaincu de la très faible efficacité de la formation continue, qui touchait au mieux 10 % des professeurs de l'académie, des fidèles que l'on voyait revenir année après année. À l'IUFM, nous avions devant nous, à peu de chose près, la totalité des promotions successives de futurs professeurs. En outre, quoique le volume de formation restât ridiculement réduit par rapport à ce qu'il doit être dans une vraie profession, il n'en était pas moins considérablement supérieur à ce qu'il avait pu être dans le cadre du CPR.

La formation des professeurs stagiaires était fondée sur les difficultés que nous rapportaient ces élèves professeurs, à travers des questions écrites recueillies chaque semaine ouvrable. Bien entendu nous n'avions pas forcément « en stock » des réponses solides à ces questions ; mais le principe était de prendre acte que telle ou telle question se posait, qu'elle était un « problème de la profession » auquel la recherche devait à terme apporter une solution. J'étais certain d'une chose – que beaucoup ne partagent pas *en réalité*, même aujourd'hui. Dans la dynamique qui emporte des pans entiers de la vie sociale, tels ceux de la santé ou de l'éducation, la formation n'est pas première, parce qu'elle doit s'alimenter, dans nos sociétés, à la recherche. Plus exactement, il y a une dialectique de la recherche et de la formation, celle-ci fournissant des problèmes « primaires » à celle-là et servant de milieu « adidactique » principal auquel confronter une production de recherche, quelque modeste qu'elle soit. L'ambition que je conçus alors, avec un petit nombre de guérilleros avec qui j'avais parfois longuement travaillé à l'IREM – je pense notamment à Odile Schneider, à Jacques Tonnelle, à Michel Jullien, à Christian Reymonet – pouvait se dire ainsi : il s'agissait de concevoir et de réaliser une formation qui contribuerait à faire passer le métier de professeur du statut séculaire de semi-profession à celui de profession ; qui, donc, participerait à (et de) la *professionnalisation du métier de professeur*. C'est à cela que nous avons employé nos forces, avec enthousiasme, au prix de bien des batailles, sans nous laisser décourager par les aboiements que suscitait le passage de la caravane. En tout cela, bien sûr, j'appris beaucoup.

## Ce que j'ai appris 5

### *De l'IREM à l'IUFM : ce que j'aurais voulu ignorer*

Les années passées à l'IREM avaient vu se développer mes activités de recherche et celles des quelques personnes qui composaient avec moi le « groupe *Didactique* » de l'IREM. Mais l'existence de ce groupe même me paraissait être une anomalie permanente : il jouxtait d'autres groupes, autrement étiquetés – il y avait ainsi le groupe *Analyse*, le groupe *Géométrie*, etc. –, qui ne prétendaient nullement « faire de la didactique » ni même « faire de la recherche » en quelque domaine que ce fût, alors bien sûr que, dans le groupe *Didactique*, nous travaillions également sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, de la géométrie ou de la statistique par exemple. Deux mondes se côtoyaient donc, non sans malentendus. Pour moi, les IREM, instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, devaient devenir de véritables instituts de recherche, avec leurs collaborateurs « professionnels », leurs « terrains », leurs formations (qui permettaient notamment la mise à l'épreuve des fruits de la recherche) et avec, en tout premier lieu, *leurs chercheurs*. Or je compris bien vite que c'était là un point de vue qui *reculait* au lieu de s'imposer : la quasi-totalité des gens qui « venaient à l'IREM » considéraient sans le dire – parce que, à leurs yeux, cela allait de soi – qu'il ne s'agissait nullement d'un institut de *recherche*. La situation évoluait en sens inverse de celle que je souhaitais voir se réaliser.

D'une part, en effet, je voyais les didacticiens qui avaient trouvé avantage à amorcer leurs recherches dans un IREM s'efforcer de migrer vers des institutions plus respectables en créant des « laboratoires » ou en se faisant une place dans des laboratoires existants en des domaines connexes non fondamentalement hostiles à la didactique – c'était souvent, me semble-t-il, affaire d'arrangements personnels. D'autre part, les IREM continuaient à être ce pour quoi, en vérité, ils avaient été conçus : des lieux francs où des professeurs pouvaient se retrouver pour « réfléchir » hors hiérarchie sur des questions d'enseignement, mais d'où la recherche proprement dite, celle qui se traduit en thèses, en articles publiés, etc., était exclue. Le mot de « réflexion » était le mot-fétiche qui définissait idéalement la nature des activités qu'on y menait « normalement » : on créait des « groupes de réflexion », qui allaient parfois, il est vrai, jusqu'à être des « groupes de travail », où des productions pour la classe prenaient forme. J'étais pour l'essentiel hostile à cette problématique institutionnelle mais je devais l'assumer comme directeur.

Les transfuges des IREM, dont j'étais, eurent à vivre une expérience que, personnellement, je n'avais pas vu venir. Dans les IREM, nous étions respectés, voire reconnus et, dans une certaine mesure même, appréciés, même si une coterie anti-didacticienne s'était emparée de certains moyens qui auraient dû échoir en partage à *l'ensemble* de la communauté des IREM. (Ainsi étais-je, à l'instar de quelques autres, *persona non grata* en telle revue dont cette bande avait fait son repaire.) Sitôt que nous fûmes entrés à l'IUFM, avant que cette institution se mette même à fonctionner, nous fûmes tenus pour suspects de la part de ceux-là même dont nous nous étions crus si proches. Bref, nous étions sous surveillance, car nous fréquentions désormais un mauvais lieu et l'on devait craindre que, saisis d'un illuminisme pédagogique que personne ne nous connaissait, nous y bradions la gloire des mathématiques, que tentaient de protéger, à sage distance de la fournaise des IUFM, quelques prêtres et prêtresses des mathématiques éternelles qui continuaient à officier dans les IREM. J'aurais pu dire :

« Foutaise ! » Mais le ver était dans le fruit qui, quelques années plus tard, aurait accompli son œuvre.

Quand je quittai l'IREM, les relations avec les corps d'inspection n'étaient plus depuis longtemps un vrai problème – chacun avait son territoire où l'autre n'intervenait guère. Une proposition de coopération avec le CPR lancée depuis l'IREM quelques années auparavant sous la houlette de Jean-Louis Ovaert, qui avait quelque titre à conduire une telle entreprise, s'était ainsi brisée sur le refus affolé des IPR. Dès que je fus parti, à la rentrée 1991, on vit réapparaître d'une part des IPR mus par un fort sentiment irrédentiste, qui rétablirent aussitôt les hiérarchies traditionnelles, et d'autre part cette catégorie de collègues mathématiciens qui venaient là mus par le désir d'aider les professeurs en leur prodiguant les bienfaits dont leur lien avec le haut savoir mathématique leur donnaient le monopole. J'ai appelé ces personnes, souvent des plus estimables au plan humain, des *évergètes*, en reprenant ainsi un mot formé d'après le grec (εύεργετέω signifie « je fais du bien », un évergète est un bienfaiteur). Tout cela, à mes yeux, contribuaient, sous des apparences de générosité désintéressée, à maintenir le métier de professeur dans son état traditionnel de semi-profession, marqué notamment par la rareté ou plutôt par la quasi-absence de hauts savoirs professionnels issus de la recherche. À distance – à l'IUFM – je pouvais ignorer tout cela. Mais je ne pouvais en être dupe tout à fait : le vieux monde était de retour ; plus tard – mais cela semblait alors si lointain ! –, il fondrait sur sa proie et c'en serait fini des IUFM.

## *À l'IUFM : tout prendre*

Entre le travail accompli à l'IREM (où j'étais resté presque vingt ans) et celui que je devais mener à bien à l'IUFM à partir de 1991, il y avait une différence notable. Dans le premier cas, je faisais de la recherche « libérale », dont les sujets étaient plus ou moins décidés librement – libéralement –, comme il en va souvent avec les sujets de thèse. À l'IUFM, cette recherche libérale n'était plus de mise : nous étions confrontés, en quelque sorte de force, à des questions apportées par de jeunes professionnels en formation, et nous n'étions pas libres de choisir : il fallait *tout prendre*. J'appris là à reconnaître deux conditions solidaires essentielles à la productivité de la recherche : *ne pas choisir* (et ne renoncer à chercher qu'en dernière limite, quand le problème apparaît provisoirement tout à fait hors de portée), et embrasser *un vaste domaine* au lieu de se « spécialiser » de façon souvent illusoire dans de minuscules parcelles de l'immense champ que le souci d'une profession en devenir nous imposait de labourer. La formation devint dès lors une succession recommencée année après année de déconstructions et de reconstructions, dont je ne donnerai ici, à titre d'illustrations, que deux ou trois exemples, en me cantonnant à des questions mathématiques. Une question que la clinique de cette formation m'avait par exemple amené à poser – on verra le lien avec une observation faite plus haut – était la suivante : l'axiomatique du plan de Hilbert suppose un ensemble de parties du plan appelées droites et satisfaisant à certaines conditions imposées par cette axiomatique ; si l'on identifie alors ce plan à l'espace affine $3^2$, est-il vrai que l'ensemble $\Delta$ des variétés affines de dimension 1 de $3^2$ *n'est pas* le seul ensemble de parties de $3^2$ satisfaisant cette axiomatique ? La réponse du *Journal* du séminaire des PCL2 commençait ainsi : « La réponse est immédiate, et positive : si $\varphi$ est une bijection *quelconque* de $3^2$, le couple ($3^2$, $\varphi(\Delta)$) satisfait l'axiomatique de Hilbert (par transport de structure), et cette axiomatique ne caractérise donc pas les variétés affines de dimension 1 de $3^2$. » (Chevallard 2006-2007, pp. 451-452). À cela faisait alors pendant une remarque des plus concrètes :

> Le fait que la rectilinéarité, notion *physique*, ne puisse pas être caractérisée en termes *mathématiques* entraîne que, avec des élèves de 6<sup>e</sup> notamment, on ne peut faire « l'économie » d'une construction préalable de la notion *sensible* de droite, *qu'aucune théorie mathématique ne saurait à elle seule engendrer*. D'une manière générale, en 2<sup>de</sup>

> comme en $6^e$, il convient de revenir aussi souvent que c'est utile à l'espace sensible : comme en d'autres domaines, *les mathématiques supposent ici le non-mathématique, qu'il s'agit précisément de mathématiser.*

La même observation était faite aussi à propos de la perpendicularité physique, qu'on ne saurait davantage caractériser mathématiquement. Le but était toujours d'explorer le *topos* réel – et non pas supposé – de l'élève. Ainsi montrait-on que, lorsque certains élèves, en cinquième, disent avoir réussi à construire un triangle non aplati de côté 9, 5 et 4 centimètres, lorsque certains même ajoutent que, si l'on commence par le petit côté, la chose est plus évidente encore, ces élèves ne déraisonnent pas. Si $a \geq b \geq c$ sont les mesures en question, avec $a = b + c$, si les côtés qui devraient avoir pour mesure $b$ et $c$ ont, par suite d'une petite imprécision graphique, pour mesures réelles $b(1+r)$ et $c(1+r)$, le triangle effectivement tracé a une hauteur $h$ dont le calcul montre qu'elle vérifie $h^2 \approx 2rbc$. Pour $r = 1$ %, on a $h^2 \approx 0{,}02 \times 4 \times 5 = 0{,}4$ et donc $h \approx 0{,}63$, ce qui, si l'unité est le centimètre, est clairement visible sur le dessin. Si l'on commence par le petit côté, la hauteur est $h'^2 \approx 2rab = \frac{a}{c}(2rab) = \frac{a}{c}h^2$. Ici, $\frac{a}{c} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ et donc $\sqrt{\frac{a}{c}} = 1{,}5$, ce qui donne $h' \approx 0{,}95$. Le calcul confirme ainsi la raison graphique des élèves, contre la raison géométrique du professeur.

### *Le dépérissement de l'enseignement des mathématiques*

L'exploration serrée de l'enseignement *réel* des mathématiques – qui, par le truchement des professeurs stagiaires, était notre première pierre de touche – m'apprit bien des choses. Ce qu'allait me montrer le travail systématique sur le curriculum secondaire, auquel je me voyais désormais librement astreint, et ce que, par contraste, je ne voyais que par bribes dans la pratique de la recherche libérale qui avait été la mienne à l'IREM, c'était l'état historique de décomposition où se trouvait le corpus mathématique enseigné, après la commotion de la réforme des mathématiques modernes (qui avait procédé utilement à la réfection générale des infrastructures mathématiques) et la réaction en forme de contre-réforme qui s'était ensuivie autour de 1978. Instruit par des exemples historiques mémorables (celui de la rhétorique dans le dernier tiers du XIX$^e$ siècle, celui aussi du latin-grec dans la seconde moitié du XX$^e$, où chaque fois une discipline « reine » était tombée du piédestal où elle était demeurée depuis des siècles), j'avais plus d'une fois, au cours de ces années, prévenu les futurs professeurs que nous formions qu'ils ne termineraient peut-être pas leur carrière comme ils la commençaient – comme professeurs de mathématiques, *tout court*.

Je ne brosserai ici que bien rapidement le tableau que je découvrais alors chaque jour davantage. Les « œuvres » mathématiques à étudier trônaient dans le programme comme des monuments dont personne ne connaissait plus trop l'usage, ni même l'origine. Les *raisons d'être* semblaient perdues ; elles l'étaient. Pourquoi étudiait-on, à l'école, les angles, les triangles, les tétraèdres, les fractions et leur simplification, l'inverse d'un nombre et *tutti quanti* ? Il y avait eu un temps où les manuels proposaient, en fin de chapitre, une section intitulée *Utilité de…* qui faisaient connaître certaines des raisons d'être des réalités mathématiques que l'on venait de passer en revue. Dans un *Traité de géométrie élémentaire* (Poulain 1885), au chapitre *Des parallèles et des parallélogrammes*, on trouve ainsi un bref développement intitulé *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*. Dans le langage du temps, l'auteur y précise que « ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver que deux droites sont égales, que deux angles sont égaux, que deux droites sont parallèles » (p. 39). Il n'y avait là aucun lyrisme, aucune superbe, aucune grandiloquence : c'est cela qui me fera dire, au scandale de certains, que « les mathématiques, c'est de la plomberie ». Pour retrouver une certaine authenticité épistémologique des mathématiques enseignées, il convenait − et il convient toujours − de « démonumentaliser » cet enseignement, de retrouver les raisons d'être des œuvres mathématiques étudiées. Or cela suppose que l'on accepte ce fait essentiel, antinomique des discours euphoriques sur les mathématiques, sur leur beauté, etc., qu'est la nature « plombière » de l'activité mathématique. Tel est le roc énorme qui bloque le passage vers un avenir où l'enseignement des mathématiques retrouve son lustre et son pouvoir attractif à l'endroit de qui ne se laisse plus prendre aux discours apologétiques traditionnels.

### *La TAD se développe au chevet du métier de professeur*

L'état de la TAD au début de la décennie 2000 ne sera plus le même qu'au début de la décennie 1990. Le travail réalisé à l'IUFM fut à cet égard fondamental. En formation initiale, comme je l'ai dit, il fallait affronter − en droit − tous les problèmes qui se faisaient jour. Le « trésor » accumulé jusque-là en fut largement enrichi. Pour cela, je revins alors sur certains acquis antérieurs. Les idées de *type de tâches* (ou, plus exactement, de type de *problèmes*), de *technique*, de *raison d'être* même, et finalement de praxéologie (didactico-mathématique) m'étaient apparues déjà clairement dans les remarquables ouvrages de Léonhard Épistemon parus chez Cédic/Fernand Nathan grâce à la diligence de Jean-Louis Ovaert et de Jean-Luc Verley. Là encore le contraste était fort entre certains discours complaisants sur les mathématiques et un travail au plus près des besoins de l'activité mathématique, dont voici un simple et unique exemple (*Analyse* 1, 1983, pp. 21-22) :

> a) **Parties ouvertes.** Cette notion est utile pour étudier les *problèmes locaux :* continuité (chapitre 3), dérivabilité (chapitre 4), différentiabilité (*Analyse* 5), comparaison des fonctions au voisinage d'un point (chapitre 3), propriétés affines et métriques des courbes et des surfaces (*Analyse* 2), etc.
> Pour montrer qu'une partie $U$ est ouverte, on dispose des méthodes suivantes :
> − Pour tout point $a$ de $U$, on construit un intervalle (ou une boule) de centre $a$ contenu dans $U$ (autrement dit, on utilise la définition des ouverts).
> − On fait apparaître $U$ comme image réciproque d'un intervalle ouvert par une fonction numérique continue. Ainsi, les parties de 3 ou de $3^n$ définies par des *inégalités strictes* portant sur des fonctions continues sont ouvertes.
> − On utilise les opérations sur les ouverts.
> Les points précédents sont illustrés par les exercices 1.26, 1.27 et 1.31, et les VRAI OU FAUX 25 à 28.

Dans ces ouvrages, je rencontrai aussi l'idée que, lorsqu'on étudie un « exercice », c'est en fait *tout un type de problèmes* pour lequel on ébauche une *technique* censée marcher au moins sur le spécimen étudié. L'idée d'*organisation* mathématique (et plus largement d'organisation *praxéologique*) me fut inspirée notamment par la lecture du livre de Hans Freudenthal, *Mathematics as an educational task* (1973). La base théorique restait bien entendu la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau. Mais, dans la pratique de la formation, je m'appuyais aussi sur un article peu connu du mathématicien Georges Bouligand (1889-1979) intitulé « Regards sur la formation mathématique » (1962) qui allait contre la monumentalisation du curriculum en promouvant l'idée simple et fondamentale que le travail mathématique est la résultante d'une part de l'activité de *résolution de problèmes*, d'autre part de l'activité d'élaboration d'une *synthèse* qui mette en forme l'organisation mathématique issue de la résolution des problèmes étudiés, l'oubli d'un des deux termes constitutifs du dualisme problèmes/synthèse conduisant à un curriculum mathématique inauthentique. Tout cela se concrétisait dans les notions d'AER − d'activité d'étude et de recherche − et d'organisation *didactique*, avec le modèle des *moments de l'étude* ou encore la notion de *question cruciale* dans l'étude d'un problème, toutes choses que je ne rappellerai pas ici.

De fait, tout cela et bien d'autres choses encore se trouvent dans les éditions successives du séminaire destiné aux PCL2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille. Je dois à la vérité de dire que bien peu de gens dans la communauté didacticienne française, semble-t-il, firent l'effort d'en prendre connaissance. Des bribes circulaient grâce aux articles que de loin en loin je publiais. Mais tout s'est passé comme si un texte long – autour de 500 pages –, riche, systématique restait invisible en dépit même des invitations à le lire qu'il m'arriva de lancer à plusieurs reprises dans de grandes réunions nationales. Je reste persuadé qu'un des mobiles derrière cette incuriosité apparente était simplement le fait que, pour beaucoup d'entre nous, des documents adressés à des *étudiants* ne sauraient être porteurs de morceaux de science méritant qu'un chercheur en prenne connaissance, ce qui allait à contre-fil de notre problématique de formation fondée sur la dialectique de la recherche et de la formation et ce qui était et reste pour moi un signe de mauvaise santé épistémologique de notre communauté.

Ces circonstances ont pesé sur la réception de la TAD. C'est ainsi que, si la notion d'organisation mathématique a été reçue à peu près correctement, la notion indissociable d'*organisation didactique* a fait l'objet de méprises dont l'examen nous ramènerait à des problèmes déjà évoqués. Très tôt j'ai utilisé l'adjectif *didactique* non pour qualifier un geste d'*enseignement* seulement, mais pour désigner un geste d'*étude* (effectué par un étudiant, un élève, un chercheur) ou *d'aide à l'étude* (réalisé par un professeur, un parent, un directeur de recherche). Un « savoir didactique » est donc, en mathématiques, une praxéologie (ou un fragment de praxéologie) dont la mise en œuvre permet d'étudier des questions de mathématiques. C'est ainsi que savoir que, pour prouver que $U$ est ouvert, je peux faire « apparaître $U$ comme image réciproque d'un intervalle ouvert par une fonction numérique continue » est une connaissance *didactique* – de nature mathématique. Les principaux outils d'étude de questions de mathématiques sont eux-mêmes mathématiques. Certains outils didactiques sont, certes, non mathématiques, parce qu'ils n'ont pas (encore) été mathématisés : il y a tendanciellement une mathématisation du didactique en mathématiques, le mathématique *stricto sensu* et le didactique nouant entre eux des relations dialectiques. Plus généralement, si, dans un champ de connaissance et d'action donné, j'appelle *praxéologique* ce qui relève proprement de ce champ, le didactique relatif à ce champ sera fait en grande partie de praxéologies de ce champ et se construira dans une relation dialectique avec celui-ci, avec en particulier une intégration progressive du didactique dans le praxéologique. C'est tout cela, au moins, que j'appris alors, sans toujours pouvoir le faire connaître et reconnaître au-delà d'un cercle étroit, faute de conditions idoines.

## Problèmes de la profession 5

La noosphère de l'enseignement des mathématiques apparaît, à travers les IREM notamment, comme faite d'au moins deux mondes qui s'ignorent et dont chacun peut décrire l'autre comme se livrant à des activités non ou peu pertinentes. Au sein même des jeux de pouvoir dont la noosphère est le lieu et souvent l'enjeu, l'évergétisme traditionnel, qui renaît périodiquement de ses cendres et dont j'ai dit les ambiguïtés, soulève un problème historique profond – à comparer la situation actuelle, par exemple, à celle qui prévaut depuis longtemps dans l'univers de la santé. De ce point de vue, je formulerai au moins cette question : *Comment la recherche en didactique peut-elle rendre compte de la diversité des travaux sur (ou pour) l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? Par contraste notamment avec une attitude d'apparente bienveillance pratique et humaine qui masquerait une relative indifférence épistémologique, quelle place et quel statut la recherche en didactique peut-elle donner à de tels travaux et à leurs résultats ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Contre la tentation de fabriquer sans cesse des petits mondes noosphériens que n'épargnent pas les fièvres obsidionales, on peut avancer une stratégie de développement scientifique ouverte, visant de vastes domaines de pratique – celui des professeurs de mathématiques, bien sûr, mais pas seulement –, où la recherche s'efforce indéfiniment d'articuler le local et le global, ce que j'exprimerai à travers cette question : *Rejetant les illusions du libéralisme épistémologique, quelles réorganisations de la cartographie des domaines de recherche permettraient à la didactique d'apparaître comme une source essentielle de connaissances sur les difficultés concrètes de la diffusion des connaissances ? Que comptez-vous faire à cet égard ?* Une autre question encore ne peut pas ne pas être posée, qui est liée à ce qui pourra apparaître rétrospectivement comme une urgence historique de notre temps, et dont l'abord suppose un certain sang-froid épistémologique : *Comment la recherche en didactique peut-elle prendre en charge l'hypothèse d'un effondrement historique en cours du paradigme ancien et actuel de l'enseignement scolaire des mathématiques et travailler à explorer les lignes de force les moins improbables de l'évolution de nos systèmes d'enseignement ? Que comptez-vous faire à cet égard ?*

## Épilogue : la recherche continue

Mon récit s'arrête volontairement à l'année 2000. Cette année-là voit l'introduction dans certaines classes de première des *travaux personnels encadrés* (TPE), que suivront au collège les *itinéraires de découverte* (IDD). Simultanément, et parfois en écho, dans la formation dispensée à l'IUFM d'Aix-Marseille aux futurs professeurs de mathématiques, de nouveaux problèmes sont travaillés et, corrélativement, de nouveaux concepts émergent, qui posent les premiers jalons des recherches actuellement en cours : la notion d'AER est ainsi plongée dans celle de PER – de *parcours d'étude et de recherche* – et les travaux ultérieurs amèneront à dégager la notion plus générale encore d'*enquête*, en même temps que se dessinera – à travers le *schéma herbartien* notamment – le portrait-robot d'un nouveau paradigme de l'étude scolaire, le paradigme *du questionnement du monde*. Si nombre de problèmes demeurent, la recherche continue.

## Références bibliographiques


Bateson, G. (1977). *Vers une écologie de l'esprit*, tome 1. Paris : Seuil.

Bouligand, G. (1962). Regards sur la formation mathématique. Dans F. Le Lionnais (Éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 532-542). Paris : Albert Blanchard.

Bourbaki, N. (1970-). *Éléments de mathématique*. Paris : Hermann.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Cartan, H. (1967). *Calcul différentiel*. Paris : Hermann.

Cartan, H. (1967). *Formes différentielles*. Paris : Hermann.

Chevallard, Y. (1977). *Deux études mathématiques sur la parenté*. Paris : Cédic.

Chevallard, Y. (1979), *Théorie des séries*. 1. *Séries numériques*. Paris : Cédic/Fernand Nathan.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique*. *Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd. 1991). Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 7-32.

Chevallard, Y. (2006-2007). *Séminaire de didactique des mathématiques 2006-2007* [en ligne] : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=141

Courrège, P. (1965). Un modèle mathématique des structures élémentaires de parenté. *L'Homme, 5*(3), 248-290.

Deltheil, R. (1959). *Nouveau cours de mathématiques générales*, vol. 1. Paris : Baillière.

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.

Feferman, S. (1998). *In the light of logic*. New York : Oxford University Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht : Reidel.

Hadamard, J. (1949). *Leçons de géométrie élémentaire*. 2. *Géométrie dans l'espace*. Paris : Armand Colin.

Jousse, M. (1974). *L'anthropologie du geste*. Paris : Gallimard.

Krivine, J.-L. (1969). *Théorie axiomatique des ensembles*. Paris : PUF.

Ladage, C. & Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec Internet. Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation & didactique, 5*(2), 85-116.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge : Cambridge University Press.

Lapassade, G. (1963). *L'entrée dans la vie. Essai sur l'inachèvement de l'homme*. Paris : Minuit.

Lentin, A. & Rivaud, J. (1956). *Éléments d'algèbre moderne*. Paris : Vuibert.

Lévi-Strauss, C. (1949). *Les structures élémentaires de la parenté*. Paris : PUF.

Ovaert, J.-L. & Verley, J.-L. (1983). *Analyse* 1. Paris : Cédic/Fernand Nathan.

Poulain, A. (1885). *Traité de géométrie élémentaire*. Paris : Desclée De Brouwer.

Rajoson, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas* [Thèse de troisième cycle]. Marseille : IREM.

Rolland, R. (1979). *Théorie des séries*. 2. *Séries entières*. Paris : Cédic/Fernand Nathan.

Sahlins, M. (2008). *The Western Illusion of Human Nature*. Chicago : Prickly Paradigm Press.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics: Vol. II Special topics of elementary mathematics* (Édition originale 1925). New York : Dover.

Süssmilch, J. P. (1979). *L'ordre divin dans les changements de l'espèce humaine, démontré par la naissance, la mort et la propagation de celle*-ci. Paris : INED.