Avis du Bureau de la Commission française pour l'enseignement des mathématiques
sur les
Projets d'aménagement des programmes de mathématiques du lycée

Stéphane Vinatier
Président de la CFEM

Cet avis émane de discussions au sein du Bureau de la CFEM.

1 Considérations générales

1.1 Automatismes et résolution de problèmes

Les aménagements essentiels portent sur l'introduction d'automatismes dans les programmes, dans la suite des projets de programmes de cycle 4, et sur le renforcement de l'intérêt porté aux activités de résolution de problèmes. Ces deux évolutions nous semblent aller dans le bon sens, en ce qu'elles promeuvent des activités variées et complémentaires, plutôt techniques pour les premières, réflexives pour les secondes, permettant de retravailler les acquis antérieurs pour les unes, d'aller vers de nouvelles notions pour les autres, de dégager l'esprit de tâches de calcul en les automatisant d'une part, d'utiliser la disponibilité gagnée pour travailler le sens d'autre part.

Bien sûr, il faut tenir compte, pour la mise en place de ces recommandations, de la réalité des classes, en particulier du temps limité pour les enseignements et des effectifs importants qui ne facilitent pas la personnalisation des exercices proposés aux élèves, en fonction de leur niveau, ou la proposition de « pistes personnalisées » suite aux évaluations.

1.2 Raisonnement

On pourra regretter que, dans cette variété d'activités, une plus grande place ne soit pas accordée à l'activité fondamentale de la construction des mathématiques, riche également de bienfaits pour la formation de l'esprit critique, celle du raisonnement et de la déduction logique, qui reste cantonnée à une partie transversale intitulée « Vocabulaire ensembliste et logique », comme s'il ne s'agissait ici que de vocabulaire ou de syntaxe. Si cela peut se comprendre dans les programmes généralistes du cycle 4 et de la seconde, voire de l'enseignement scientifique, il est assez étonnant que ce soit aussi le cas dans les programmes de spécialité de première et de terminale. Peut-on vraiment traiter aussi légèrement le fondement essentiel des mathématiques dans les enseignements de spécialité ? Certes la liste des apprentissages que les programmes assignent aux élèves est intéressante dans ses contenus. Cependant, l'absence de moyens pour mettre en œuvre ces apprentissages les rend illusoires : les élèves ne sont pas en mesure d'inventer les opérations sur les propositions, les règles de négation des propositions quantifiées, les quantifications implicites... Pour qu'ils produisent des raisonnements de divers types, ne faudrait-il pas qu'ils aient *appris* à le faire, de façon précise, plutôt que d'attendre qu'ils « découvrent » les structures de ces types de raisonnements ? Ne faudrait-il pas leur *enseigner* d'abord la manière standard de prouver une implication ou une assertion universellement quantifiée ?

Ces souhaits paraîtront peut-être trop éloignés de la pratique actuelle. Sans doute leur mise en œuvre demanderait-elle une phase de réflexion préalable sur les meilleurs moyens d'y parvenir. Il n'en reste pas moins que l'objectif de donner aux élèves les moyens de comprendre le raisonnement mathématique et, de là, le raisonnement en général, est incontournable à la fois pour leur formation en mathématiques et à la citoyenneté, et ne saurait rester toujours occulté et réduit à une question de « vocabulaire ».

1.3 Diversité des élèves

Dans les propositions de programmes de seconde et première générale principalement, l'accent est mis à bon escient sur la diversité des élèves, par exemple dans le préambule de seconde « quel que soit son sexe ou son origine sociale », de façon plus explicite que dans les projets du cycle 4. De même, dans la continuation de ce qui a été amorcé en cycle 4, on trouve un peu plus loin : « chaque élève, fille ou garçon, . . . ». Il reste cependant des efforts à faire concernant l'inclusivité du texte, puisque persistent par endroits des expressions comme : « le professeur », « permet à chacun », « il peut », etc.

Par contre, dans le programme de mathématiques complémentaires de terminale, le commentaire expliquant que cette option conviendra particulièrement à certaines orientations de l'enseignement supérieur, souvent choisies par les filles, pourrait leur laisser penser (même si ce n'est pas dit) que pour ces orientations le choix de la spécialité mathématiques n'est pas nécessaire.

1.4 Évaluation

De même, on retrouve sur l'évaluation une continuation de ce qui a été écrit pour les programmes de cycle 4, et ce dans tous les niveaux, ce qui est positif. En particulier l'insistance pour expliquer ce que l'on va évaluer : « les critères de réussite seront expliqués en amont ».

Une partie des activités reposant sur la résolution de problèmes, l'évaluation pourrait tenter de mesurer les compétences développées par les élèves dans ce domaine. Des pistes sont données mais elles ne montrent pas assez que l'on peut évaluer non seulement les progrès concernant l'acquisition des connaissances sur les objets mathématiques mais aussi l'acquisition de méthodes de recherche de solutions, de sélection des informations pertinentes, de remise en question des résultats trouvés, de confrontation des résultats ou des méthodes, l'appropriation de textes, etc... y compris lorsque ceci n'est pas en lien avec des typologies de problèmes.

Répétons que si l'individualisation des évaluations et des remédiations est un objectif louable, il demande du temps et des moyens pour être correctement mis en œuvre.

1.5 Probabilités et statistiques, vs arithmétique ?

Une autre tendance forte de ces aménagements est le renforcement des contenus en probabilités et statistiques, concomitamment à leur adaptation aux projets de programmes des cycles précédents. Si les connaissances dans ces domaines sont évidemment importantes pour la compréhension du monde et la formation du citoyen, il faut cependant veiller à conserver un équilibre avec les autres domaines des mathématiques, ainsi que du temps pour l'assimilation des notions et de leur sens, du temps aussi pour les différents types d'activités mathématiques.

On pourra regretter que l'équilibre proposé dans les aménagments du programme de seconde, en particulier, ne fasse pas plus de place aux notions arithmétiques, en particulier celle de nombre premier, qui a quasiment disparu des projets de programmes de cycle 4, et qui éclairerait pourtant les activités de simplification de fractions et la notion de fraction irréductible, qui ont été conservées.

2 Programmes des classes de 2$^{\text{nde}}$ et 1$^{\text{re}}$

2.1 Concernant le préambule

Les préambules suivent le même plan et leur contenu varie peu. Certaines modifications ont été portées pour uniformiser ce préambule, certaines ne l'ont pas été. Si cela peut être justifié lorsque l'on parle de la poursuite du travail ou des épreuves d'oral, on peut s'interroger sur d'autres endroits. Certains points vont dans le bon sens.

Intentions majeures. L'ajout « quel que soit son sexe, son origine sociale » gagnerait à être reporté à chaque niveau et pas seulement en seconde.

Compétences mathématiques. À propos de la résolution de problèmes, la phrase « Elle contribue à donner du sens aux notions étudiées. Elle doit faire l'objet d'un entraînement suffisamment régulier » va dans le bon sens et est conforme à nos demandes de garder de la place pour ce type d'activités. Par contre, cela ne devrait pas toujours être associé à des problèmes types, ou des morceaux de problèmes types, et on pourrait insister plus sur la prise d'initiative et l'imagination à propos des problèmes de recherche. Le texte est bien dans la continuité des programmes des cycles précédents en ce qui concerne les automatismes. Il est étonnant à ce propos que la phrase sur la nécessité de les mener conjointement avec la résolution de problèmes ait été corrigée de manière différente en 2^{nde} et 1^{re} (sujet « elle » ou « ce travail »).

Diversité de l'activité de l'élève : permettre aux élèves de percevoir la construction mathématique des connaissances va également dans le bon sens.

Utilisation de logiciels. La mention de logiciels de calcul formel est étonnante en 2^{nde}, et même au-delà elle pourrait nécessiter des pistes d'utilisation. Il n'y en a pas trace dans la partie Programmes. Par ailleurs, ici ou en lien avec les problèmes, les programmes pourraient aussi favoriser l'utilisation de matériel autre que numérique : jeux, objets en dimension 3 ; mais aussi l'utilisation de données réelles (par exemple en ce qui concerne les statistiques ou la modélisation de manière générale).

Quelques lignes directrices pour l'enseignement : les modifications faites en 2^{nde} pourraient (ou devraient) être reportées ici également. Pour la première, mettre plutôt confirmer ou susciter des vocations scientifiques.

Organisation du programme. Il faudrait préciser en première si les parties transversales donnent lieu ou non à des chapitres de cours. Pour tous les niveaux, préciser si les types de raisonnements divers proposés aux élèves doivent ou non être reconnus en tant que tel par les élèves. On pourrait imaginer que certains raisonnements doivent pouvoir être nommés, même quand il ne sont pas utilisés directement par les élèves (ceux produits par les élèves sont explicités dans la partie sur la logique).

2.2 Parties transversales

Vocabulaire ensembliste et logique. La notation des ensembles en extension pourrait être précisée : en seconde c'est certainement pour une liste d'éléments d'un ensemble discret (éventuellement avec 3 petits points) alors qu'en première (générale et technologique), il pourrait y avoir des descriptions avec des éléments génériques. Avec la notion de couple et celle de produit cartésien, on peut introduire les notations associées.

Certains types de raisonnements sont produits par les élèves, doivent-ils être identifiés quand ils sont utilisés, voire institutionnalisés ?

Algorithmique et programmation. Ce qu'est un « programme simple » n'est pas défini par le texte. Concernant les notions, en particulier dans ce qu'elles diffèrent de la notion mathématique voisine (variable), si les élèves savent en utiliser (ce qui est notifié dans les contenus et compétences) on ne dit nulle part qu'ils doivent savoir reconnaître ces éléments dans des algorithmes donnés (en particulier en langage naturel). Est-ce que la seconde concerne essentiellement l'utilisation des notions (les capacités étant de produire), alors qu'à partir de la première les notions elles-mêmes sont concernées par l'apprentissage ? Alors seulement l'élève aurait à savoir les reconnaître et les nommer, y compris dans un algorithme en langage naturel ?

Automatismes. À la cinquième ligne du texte (commun 2^{nde} et 1^{re} générale), « chiffres » devrait être changé en « nombres ».

En seconde :

— opérations sur les puissances : on pourrait préciser : multiplier ou diviser et comparer des puissances d'un même nombre, les mêmes puissances d'un nombre, peut-être (?) simplifier une fraction par une puissance d'un nombre. On pourrait également mettre ici les racines carrées de nombres positifs plutôt que page 13 ;

— passer d'une écriture à une autre : ajouter l'écriture scientifique (qui est abordée au collège) ;

— estimer un ordre de grandeur : ajouter estimer et/ou encadrer le résultat d'une opération ;

— expressions multiplicatives des fractions : pourquoi entretenir les symboles locaux parfois utilisés dans les classes précédentes mais qui ont normalement été remplacés par le trait de fraction une fois la notion de fraction quotient abordée ? La notation $\div$ n'est là que sur la calculatrice pour distinguer le moins du trait de fraction. Pourquoi l'utiliser dans un texte officiel ?

— développer, factoriser : ajouter en premier point le développement et la factorisation simples : $a(b + c) = ab + ac = a \times b + a \times c$

— proportions et pourcentages : ajouter ratio dans le 1^{er} item.

Pour la première technologique, des automatismes, issus de la classe de seconde auraient pu de la même manière être détaillés.

2.3 En seconde

Arithmétique. Il est regrettable de ne pas accorder un peu plus de place à l'arithmétique dans ce projet de programme, en particulier pour réintroduire la notion de nombre premier, qui ne figure plus dans les projets de programme du cycle 4 (ou seulement en proposition de prolongement). Les nombres premiers sont la brique de construction des entiers, et donnent du sens aux activités de simplification de fractions et à la notion de fraction irréductible. À ce titre, le projet n'explicite pas comment s'assurer qu'une fraction est sous forme irréductible, sans avoir la décomposition en produits de puissances de nombres premiers : faut-il ajouter la notion de liste des diviseurs d'un entier, pour pouvoir constater que le numérateur et le dénominateur n'ont que 1 comme diviseur commun, voire éventuellement celle de pgcd ? Et pourquoi pas de ppcm, pour arriver à l'égalité ppcm $\times$ pgcd = produit des 2 nombres ? D'autant que cela peut favoriser des liens intéressants avec l'algorithmique (algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd), en particulier si la division euclidienne est présentée sous forme de soustractions répétées (analogue à l'exemple d'algorithme proposé par le projet pour trouver le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b, si celui-ci est programmé avec des additions répétées).

S'il n'est sans doute pas souhaitable d'introduire à ce niveau la démonstration du théorème fondamental de l'arithmétique, reconnaître sur des exemples les diviseurs via la décomposition en produit de facteurs premiers est :

— d'une part un exemple d'utilisation des arbres en dehors des probabilités mais conduisant à un problème intéressant de dénombrement par multiplicativité,

— d'autre part une notion importante à connaître pour les futurs professeurs des écoles (qui pour la plupart n'iront pas en spécialité maths).

Nombres réels / Algèbre. La remarque sur la valeur absolue est en contradiction avec la page 17 : la fonction valeur absolue est étudiée comme fonction de référence. De plus c'est dommage de ne pas profiter de cette notation pour généraliser la relation sur la racine du carré à $\sqrt{a^2} = |a|$ qui est valable pour tous les nombres réels. À défaut, il faut écrire que $\sqrt{a^2} = a$ pour un réel a positif ou nul seulement.

Algèbre.

— Les expressions « Comparaison additive, comparaison multiplicative » pourraient être explicitées (signe de la différence, comparaison à 1 du rapport ? Quelle différence avec le premier automatisme de la page 9 ?).

— Tableau de signes des expressions ... et ... (au lieu de d'une expression).

— La phrase « comparer (...) en termes de variation additive ou multiplicative » pourrait elle aussi être explicitée.

Vecteurs et problèmes de géométrie.

— Il pourrait être intéressant de suggérer dans la rubrique « Histoire des mathématiques » l'étude des textes de Bellavitis et Mourey (ce dernier parle de « chemins », en amont de la notion de vecteur, ce qui peut s'approcher de l'intuition des élèves sur cette notion).

— La réintroduction des barycentres dans les programmes (ils avaient disparu depuis 2011) est une bonne nouvelle. D'autant plus que les élèves sont amenés à effectuer des moyennes pondérées de séries statistiques et, en terminale, à parler des fonctions convexes. On peut cependant s'interroger sur l'endroit choisi pour introduire cette notion affine (au milieu des vecteurs), sur l'absence de suggestions de liens avec d'autres notions étudiées, et sur la continuité du travail sur cette notion (qui n'apparaît pas en première).

— Il est dommage de ne pas en profiter pour démontrer systématiquement et pas seulement en approfondissement, la concourance des médianes d'un triangle.

- Le lien entre le point de concours des médiatrices et le centre du cercle circonscrit est connu depuis la 5^e et déjà démontré en 4^e.
- Les autres approfondissements n'ont pas de lien direct avec la géométrie vectorielle (non euclidienne). Ils arrivent ici de manière assez impromptue.

Droites du plan. Il est dommage de se priver de la résolution des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. Qualitativement, c'est déjà très utilisé en 3^e pour comparer des fonctions affines.

Fonctions.

- Il est surprenant de trouver écrit dans les programmes : « Le professeur juge de l'opportunité du moment de traiter telle ou telle fonction de référence. ». Il ne me semble pas que ce commentaire soit opportun : le professeur établit sa programmation. Ce commentaire laisse penser qu'on pourra par la suite donner des indications sur la programmation (comme c'est devenu le cas pour l'élémentaire).
- L'étude de la fonction valeur absolue est en contradiction avec la remarque sur la notation p. 12.

Information chiffrée et statistique descriptive.

- Il pourrait être bon de préciser dans la sous-partie que l'on s'intéresse à des variables quantitatives discrètes et continues (avec le dernier contenu axé sur les variables continues).
- Mis à part pour faciliter le travail sur l'histogramme, il n'y a pas de raison de regrouper en classes de *même amplitude*. Attention au risque d'interpréter l'histogramme comme un diagramme en bâtons et non un histogramme dans ce cas.
- Si on regroupe par classes, on ne sait pas en général si la répartition est uniforme dans chaque classe ; en revanche on peut le supposer (simplification du réel) pour pouvoir calculer la moyenne par exemple. En pratique, la *répartition unifome* est donc plutôt une hypothèse du modèle utilisé qu'un cas particulier. (Remarque identique à plusieurs endroits du programme où il est mentionné « dans le cas de répartition uniforme » ou assimilé.)

Croisement de deux variables catégorielles. Le découpage en sous-parties interroge, dans la mesure où celle-ci (« Croisement ») pourrait être incluse dans la précédente (« statistique descriptive »). Peut-être la distinction entre ces deux sous-parties devrait-elle porter plutôt sur le nombre de variables considérées : « statistique descriptive à une variable » pour la précédente et « statistique à deux variables » pour celle-ci ?

Il est écrit « variables catégorielles » dans cette sous-partie alors que les programmes des cycles 2, 3 et 4 évoquaient des variables *qualitatives* (nominales ou ordinales). Ce changement de vocabulaire pourrait être source de confusion, à moins de préciser le sens donné à cette expression, d'autant plus que sont mentionnées « des variables catégorielles [...] définies par des intervalles (classe d'âge, temps de transport, etc.) », c'est-à-dire des variables quantitatives continues (contrairement à une acception courante du mot « catégorielle »).

Probabilités. Le premier paragraphe pourrait être clarifié :

> « Au cycle 4, les élèves ont travaillé sur les notions élémentaires de probabilité : expérience aléatoire, issue, événement, probabilité. Ils ont construit leur intuition sur des situations concrètes fondées sur l'équiprobabilité, complétées par des répétitions d'épreuves identiques et indépendantes, permettant d'observer la stabilisation des fréquences. »

Les « situations concrètes » semblent évoquer des situations réelles (par exemple avec des vrais dés), tandis que le caractère d'« équiprobabilité » semble plutôt faire référence à un modèle probabiliste, donc à des expériences aléatoires idéalisées. Par ailleurs, en quoi ces situations concrètes sont-elles « complétées » par des « répétitions d'épreuves identiques et indépendantes » ? Qu'entend-on par l'observation de la stabilisation des fréquences ?

De même, l'expression « sous-jacente dans toute modélisation probabiliste » n'est pas claire. Il faudrait préciser ce qui est entendu par là (ou la supprimer).

Enfin, nous émettons des réserves quant aux suggestions proposées en histoire des mathématiques dans cette partie : les textes originaux en anglais (du XVIII^e siècle) de Moivre et Bayes sont en effet particulièrement difficiles d'accès. Ceux de Bernoulli, en français de cette même époque, semblent plus adaptés.

2.4 En première générale spécialité mathématiques

Suites. Nous saluons l'ajout de l'étude d'exemples de suites sans limite, afin d'éviter de ne regarder que les cas particuliers de suites avec limite.

Analyse.

— L'ajout de l'approximation linéaire et de la fonction affine tangente, en lien avec la dérivée, paraît être une bonne idée ; cependant qu'entend-on par « développement limité à l'ordre 1 » alors que la notion de limite de fonction n'est connue que de manière intuitive et ne semble pas avoir de notation ? S'agit-il simplement de vocabulaire, sans signification véritable ? S'il s'agit de donner une expression approchée de $f(a+h)$ pour h "petit", il serait souhaitable d'indiquer comment écrire cette approximation (avec quel symbole), pour éviter des confusions avec l'égalité.

— Le lien entre la fonction exponentielle et les suites géométriques est intéressant mais semble là aussi un peu ambitieux par rapport aux connaissances des élèves, qui semblent ne leur donner accès qu'aux suites géométriques de raison e... Peut-être faudrait-il préciser ce qui est attendu ici.

— Le chapeau trigonométrie a été créé mais la phrase introductive qui était dans la description générale du domaine a été supprimée. Compte tenu de la suppression de l'étude des fonctions sinus et cosinus, elle aurait plutôt dû être remplacée par une autre sous le chapeau, par exemple : « L'aspect fonctionnel de la trigonométrie n'est pas au programme. Il s'agit ici de comprendre une définition des sinus et cosinus d'un nombre donné. »

2.5 En première générale enseignement scientifique

Résolution de problèmes et automatismes. Les nouveaux programmes de cycle 3 et 4 parlant maintenant du triptyque manipuler-représenter-abstraire, peut-être serait-ce l'occasion d'uniformiser.

Évaluation des acquis des élèves. L'activité reposant essentiellement sur la résolution de problèmes, l'évaluation pourrait ici, encore plus que dans les autres programmes, mesurer les compétences développées dans ce domaine.

Analyse de l'information chiffrée. Les exemples de vraies données pouvant conduire à des analyses est appréciable.

Disparition de la dérivée au profit des fonctions polynomiales de degré 2. L'intégration dans le programme de l'utilisation des fonctions polynomiales de degré 2 permet d'exploiter et de prolonger ce qui a été vu en seconde sur les variations des fonctions sans introduire trop de technicité et dans des cadres et domaines variés. Cette proposition va dans le sens de plus de résolution de problèmes, tout en montrant en quoi l'étude des fonctions peut être intéressante. Elle devrait être de nature à aider certains élèves à mieux comprendre pourquoi ils étudient les mathématiques.

2.6 En première technologique

Les trois chapitres transversaux, ou au moins le vocabulaire ensembliste et la logique d'une part et les automatismes d'autre part, auraient pu être séparés du reste et apparaître comme transversaux directement comme pour les programmes du général.

Compte-tenu des nouveaux attendus sur les fonctions polynomiales de degré 2 en 2^{nde}, la suppression de l'étude du degré 3 en 1^{re} est tout à fait raisonnable.

3 Quelques remarques sur les programmes des classes de terminale

3.1 En terminale générale spécialité

Présentation du programme. Une erreur de copier-coller fait apparaître l'histoire des mathématiques au milieu de la partie algorithmique.

Trigonométrie : la phrase introductive qui était précédemment écrite dans les programmes de première aurait pu être recopiée ici.

Probabilités. Ne serait-il pas temps, en terminale spécialité mathématiques, de donner aux élèves une définition de ce qu'est une probabilité ?

3.2 En terminale générale option maths complémentaires

Organisation : la proposition de traiter au moins 6 thèmes va dans le bon sens, traiter la totalité des thèmes n'étant pas très réaliste en conditions ordinaires. On pourrait ajouter à la phrase « au moins 6 thèmes sur les 9 proposés, tout en couvrant l'ensemble des contenus et capacités attendus du programme , et en s'adaptant éventuellement aux orientations souhaitées par les élèves et à leurs choix de spécialités. »

Manque : la disparition de l'aspect fonctionnel des fonctions trigonométriques aurait pu être comblé par quelques éléments d'étude replacés dans le chapitre d'analyse. Ces notions sont facilement illustrables dans le thème des aires (aire d'un parallélogramme par exemple), et pourrait manquer plus tard pour l'étude de certains phénomènes, en particulier physiques (étude d'un signal)...

3.3 En terminale technologique

Les trois chapitres transversaux, ou au moins le vocabulaire ensembliste et la logique d'une part et les automatismes d'autre part, auraient pu être séparés du reste et apparaître comme transversaux directement comme pour les programmes du général.