Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques

ups

Mission mathématiques [1]
Contribution de l'UPS

Introduction

Les difficultés que rencontrent la plupart des bacheliers S en première année d'enseignement supérieur font désormais l'objet d'un large consensus, partagé par l'UPS. En voici une liste.

– Les étudiants n'ont pas l'habitude d'apprendre un cours en profondeur et ont de grandes difficultés de mémorisation, d'où des connaissances très volatiles et de grandes difficultés à entrer dans des exercices demandant une compréhension réelle des objets étudiés.
– Les étudiants n'ont pas développé suffisamment leurs facultés d'abstraction et sont déconcertés par les mathématiques de l'enseignement supérieur.
– Les étudiants n'ont pas acquis les bases du raisonnement et de la syntaxe mathématiques (par exemple confusion entre implication et équivalence, entre cas général et cas particulier, flou sur la notion de démonstration).
– Les étudiants ont très peu d'autonomie en calcul, qu'il s'agisse de calcul numérique (décimaux, fractions), littéral (distributivité, identités remarquables, puissances), de trigonométrie ou d'analyse (limites, dérivation, intégration).
– Les étudiants ont très peu de vision géométrique et ne maîtrisent pas le calcul vectoriel.

Ces difficultés s'avèrent très pénalisantes en mathématiques, mais également en physique et chimie. Les origines de cette situation sont à chercher à l'école primaire, au collège et au lycée. C'est sur ce dernier segment que l'UPS a le plus développé sa réflexion, en participant depuis plusieurs années à des groupes de travail avec d'autres associations et sociétés savantes (notamment SMF, UdPPC, SFP, SIF) [2]. Nous avons dégagé quelques idées simples, visant à améliorer l'efficacité de l'enseignement des mathématiques au lycée, dans l'optique d'une préparation aux études supérieures. Elles se déclinent à deux niveaux.

– *Un changement dans les pratiques*, visant à redonner au cours une place de référence et à travailler bien davantage calcul, raisonnement et rédaction.
– *Un changement dans les contenus*, visant à produire des programmes équilibrant judicieusement les champs enseignés (algèbre, géométrie, analyse, probabilités), définissant quelques thématiques fortes dont l'étude sera approfondie dans le supérieur, tissant autant de liens que possible entre ces champs et avec les autres disciplines scientifiques et éliminant les branches mortes.

Nous souhaitons souligner que nos propositions sont formulées dans la perspective d'un enseignement de masse. Il nous semble possible de faire beaucoup mieux pour beaucoup d'élèves, à condition de changer significativement pratiques et programmes, en prenant préalablement le temps de réflexion nécessaire. C'est dans cet esprit que nous répondrons aux questions de la Mission.

1 Construction du cours dans l'enseignement des mathématiques

Pour corriger des excès maintenant bien anciens, la place du cours au collège et au lycée s'est amenuisée jusqu'à peau de chagrin. La consultation des manuels met en évidence les dérives suivantes : le cours proprement dit est mal identifié, perdu au milieu d'activités diverses ; les démonstrations sont souvent floues, faute en particulier de clarté dans les prérequis.

1. Pilotée par Cédric Villani et Charles Torossian, novembre 2017.
2. Ces réflexions collectives ont permis de définir un « bagage scientifique pour tous ».

S'il est clair que les mathématiques requièrent une attitude active, dans laquelle exercices et problèmes ont une place centrale, il n'en reste pas moins que le cours est le point d'appui à partir duquel l'élève construit et structure ses connaissances. Le cours joue par ailleurs un rôle très important de *modèle* (précision de la rédaction, déroulé des calculs, clarté des dessins).

Il est essentiel que les élèves disposent d'un cours écrit. Ce cours doit être en grande partie pris sur le modèle donné par le professeur au tableau. Calculs et dessins doivent être faits par le professeur et non pas seulement projetés [3].

Ce cours doit comporter un résumé contenant les résultats que l'élève doit connaître de manière pérenne, des exemples simples et de nombreux dessins. Dans les classes de collège, son volume doit être très modeste. Dans les classes scientifiques de première et de terminale, le cours doit comporter un nombre raisonnable de démonstrations bien choisies. Enfin, révisions en début de chapitre et mises en perspective devraient être systématiques.

2 La place du calcul au collège et au lycée

La chute des capacités calculatoires des lycéens est reconnue par l'ensemble des acteurs de l'enseignement supérieur scientifique [4]. Elle s'explique :

– par une pratique très insuffisante des calculs simples, dans tous les domaines indiqués dans la section **1** ;
– par un recours trop fréquent et mal pensé aux calculatrices;
– par l'absence de calcul en physique-chimie.

L'enseignement des mathématiques ne saurait se réduire à des gammes calculatoires. Il n'en reste pas moins :

– que les gammes sont un passage obligé pour acquérir des automatismes qui libèrent l'esprit et lui permettent de se consacrer à des tâches plus évoluées [5] ;
– que les gammes contribuent à développer une intelligence du calcul, fondamentale dans l'apprentissage des mathématiques (reconnaissance de formes, mise en place de stratégies) [6] ;
– que les utilisateurs des mathématiques doivent en priorité comprendre et utiliser des algorithmes calculatoires.

L'idéologie anti-calcul qui sous-tend les programmes du lycée, fondée sur une perception naïve de l'apport des « nouvelles technologies », est donc lourdement fautive. Aucune amélioration ne viendra en début de supérieur tant que cette tendance n'est pas inversée.

Le terme générique « calcul » recouvre en fait des contenus très variés : calcul numérique, littéral, équations algébriques, trigonométrie, inégalités, études de fonctions, calculs de limite, intégration, calcul vectoriel... Il s'agit, on le voit, de thèmes centraux en mathématiques, et utiles ailleurs. C'est en fait un point de vue opposé à celui qui prévaut actuellement qu'il faudrait adopter, en rendant au calcul la place qui est la sienne, consubstantielle aux mathématiques et susceptible d'un enseignement élémentaire conséquent et efficace.

Un exemple. L'analyse « à la Weierstrass » (utilisation systématique des ε, borne supérieure, démonstration rigoureuse des propriétés des fonctions continues ...) relève à notre sens de la première année de l'enseignement supérieur. En revanche, un premier enseignement de type calculus à l'anglo-saxonne [7], est simultanément un objectif réaliste pour la fin du lycée, une bonne préparation à de nombreuses filières post-bac et un magnifique terrain de jeu.

3 Bien préparer à l'enseignement supérieur, pour qui, comment ?

L'UPS n'a pas d'expertise pour l'ensemble des bacheliers. Elle peut, en revanche proposer une réponse pour les futurs scientifiques, explicitée à la fin de la section **1** : *pratiques et programmes doivent être en phase avec l'enseignement supérieur*. Les thèmes choisis doivent être traités avec une certaine ampleur [8] et des attendus techniques conséquents.

3. Ce n'est pas la qualité esthétique d'un dessin qui importe, mais de voir comment le tracé s'effectue. De même, un calcul projeté est moins efficace qu'un calcul que l'on voit se faire.
4. Il est significatif que les programmes de CPGE scientifiques issus de la réforme de 2013 aient explicité, en début de première année, un certain nombre d'items calculatoires.
5. Il est illusoire de penser que le calcul peut être enseigné efficacement sans une pratique massive d'exercices simples et répétitifs. Malgré leur mauvaise réputation, de tels exercices ont en outre la vertu de rassurer les élèves.
6. Même si la substitution des idées au calcul est une des forces motrices des mathématiques, il est souvent difficile de séparer dans une démonstration calcul et raisonnement.
7. Les concepts liés à la convergence doivent être définis, sans être un objectif prioritaire. De même, les théorèmes de base (valeurs intermédiaires, variation des fonctions) doivent être correctement énoncés, mais non démontrés. En revanche, une bonne maîtrise du calcul des limites, de la dérivation et de l'intégration est un attendu.
8. Le programme actuel de terminale sur les nombres complexes est d'une indigence et d'un manque d'intérêt qui amènent à se demander pourquoi ce chapitre a été conservé.

Contenus

Outre l'analyse, sur laquelle nous avons un peu explicité nos idées dans la section **3**, il nous semble très important que les élèves reçoivent un enseignement consistant en calcul algébrique et en géométrie. Les nombres complexes constituent ici un terrain de jeu privilégié, où se rencontrent beaucoup d'objets importants dont le bachelier approfondira l'étude dans le supérieur.

La géométrie subsiste au lycée sous forme de bribes incohérentes [9]. Elle joue pourtant un rôle central en sciences. Par ailleurs, le développement de l'intuition géométrique doit être un objectif majeur de l'enseignement des mathématiques. L'enseignement de la géométrie, fondé au collège sur les configurations, doit progressivement intégrer les outils qui lui donnent toute sa puissance et seront généralisés ultérieurement (lien algèbre-géométrie via la géométrie analytique, calcul vectoriel, barycentre). Il est en outre indispensable de recourir à la représentation géométrique dans tous les champs du programme.

L'enseignement des probabilités-statistiques pose question. L'étude obsessionnelle de l'échantillonnage, menée pendant les trois ans du lycée, apporte peu en termes de formation mathématique [10]. Il en est de même de la partie du programme de terminale portant sur les lois continues. Un enseignement de probabilités finies est souhaitable, accompagné des rudiments de combinatoire.

Quant à l'arithmétique, très formatrice, elle est peut-être à réserver à des élèves dont la vocation mathématique est déjà affirmée.

Il convient enfin d'exploiter au maximum les liens entre les chapitres du programme et les interactions avec les autres disciplines.

Pratiques

À l'importance du cours et des calculs s'ajoutent les points suivants.

- Produire un texte mathématique cohérent nécessite de savoir déclarer les objets, utiliser les quantificateurs et les symboles logiques, d'avoir une idée du type des objets. Ces règles doivent être introduites et travaillées au lycée.
- Le moteur des mathématiques est la résolution d'exercices et de problèmes. Après avoir travaillé les gammes, il faut donc offrir aux élèves un large choix d'exercices plus amples, progressifs, demandant de rassembler plusieurs arguments ; de tels exercices, qui permettent de dépasser le raisonnement à un pas, constituent une excellente préparation à l'enseignement supérieur. Les exercices contextualisés doivent être fortement réduits et mieux choisis. Pour stimuler le goût de la recherche, il convient enfin de proposer aux élèves qui se destinent aux sciences des énoncés plus abrupts.

Par ailleurs, si l'on vise une préparation efficace à l'enseignement supérieur, ces préconisations nécessitent des horaires disciplinaires renforcés.

4 La place de l'histoire des mathématiques dans la didactique

L'histoire intervient ici de plusieurs façons.

C'est, en premier lieu, un guide pour définir clairement les objectifs des programmes, notamment à travers les « grands problèmes » [11]. Ainsi, l'algèbre, déjà présente dans l'Antiquité, mais limitée par l'absence de bonnes notations et un lien trop systématique avec la géométrie [12], s'est développée à partir de la Renaissance avec pour principal objet l'étude des équations algébriques, d'où sont issus les nombres complexes. La naissance de l'analyse est l'invention, au XVII^{e} siècle, du calcul infinitésimal, dont la mise au point se poursuit durant les deux siècles suivants. Ces notions et les problèmes qui les ont motivées restent au coeur des mathématiques et de leurs applications. Ils doivent donc figurer au centre de l'enseignement ; nos propositions de contenus en prennent acte.

Les professeurs peuvent tirer parti de l'histoire des mathématiques dans leur enseignement. Les élèves sont souvent sensibles à la « légende des mathématiques ». La narration peut jouer ici un rôle motivant. D'autre part et surtout, les leçons épistémologiques qui se dégagent de l'histoire (rôle des problèmes, enchevêtrement des concepts et des techniques, nécessité de l'abstraction) sont évidemment de nature à contribuer à la formation, notamment en permettant de dépasser un utilitarisme à courte vue [13].

9. Le programme de géométrie dans l'espace de terminale est un bon exemple.

10. Et est intégralement oubliée après le bac.

11. Ce point de vue apparaît, au niveau de la première année post-bac, dans la remarquable collection Leonard Epistemon, sous la direction de J.L. Ovaert et J.L. Verley.

12. L'absence de notations efficaces (parenthèses, indices, sommes, produits) a été durant des siècles un obstacle au développement des mathématiques et, conséquemment, de la physique.

13. L'invention du calcul différentiel et intégral a permis de traiter de manière quasi automatique des questions variées et jusque-là inaccessibles, en mécanique comme en analyse et en géométrie (trajectoires des planètes, problèmes d'optimisation, tangentes à une courbe, calculs de longueurs, d'aires et de volumes...). La trigonométrie des Anciens (Ptolémée) était fondée sur la fonction corde, de maniement beaucoup plus compliqué que cos et sin ; la forme moderne de la trigonométrie a considérablement simplifié de nombreuses questions de géométrie ou de physique. Introduits pour résoudre les équations de degré 3, les nombres complexes sont désormais indispensables en mathématiques et en physique.