Vers la fin de la confusion entre le nombre et la quantité représentée par une collection de numéros ?

Rémi Brissiaud
Chercheur au Laboratoire Paragraphe, EA 349 (Université Paris 8)
Équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances »
Membre du conseil scientifique de l'AGEEM

Cela fait plus de deux mois que la Cfem a inauguré un débat sur les premiers apprentissages scolaires des nombres. Dans un premier texte, l'importance de retrouver un usage commun des mots *grandeur*, *quantité*, *nombre*, *cardinal*, *ordinal* et *dénombrement* a été soulignée. Ces deux derniers mois, dans des discussions informelles, divers collègues m'ont, d'une part souvent apporté leurs encouragements à poursuivre la démarche amorcée et, d'autre part permis de mieux comprendre là où résidaient encore des incompréhensions. Ce texte vise à les lever.

Il commence par un rappel des deux points essentiels abordés dans le précédent : le premier est l'explicitation de la confusion entre le nombre et la quantité représentée par une collection de numéros et le second l'hypothèse d'un effet délétère sur le long terme de l'enseignement du comptage-numérotage que cette confusion induit. La distinction fondamentale sera ensuite précisée en abordant le cas des grandeurs continues (longueurs, aire…) puis en développant un point qui était à peine esquissé dans le premier texte : le lien entre cette confusion et les difficultés des élèves français dans la compréhension de l'écriture des nombres à plusieurs chiffres. Il sera également montré que si le projet de programme maternelle se trouvait adopté tel quel, la confusion perdurerait alors que la réduction de l'échec et des inégalités dans la compréhension des nombres dépend vraisemblablement du fait qu'elle soit levée.

Une confusion décelée et une hypothèse didactique

L'explicitation de la confusion entre l'accès au nombre et la représentation des quantités par une collection de numéros

Depuis 25 ans environ, les étudiants des écoles normales, des IUFM puis des ESPE apprennent que les élèves doivent développer des connaissances leur permettant de garder la mémoire des quantités. La situation pédagogique recommandée à cet effet est celle où l'élève est devant une collection de coquetiers et où l'enseignant lui demande d'aller chercher à l'autre bout de la classe, en un seul voyage, une collection d'œufs qui conduise à mettre exactement un œuf dans chaque coquetier. Or, pour réussir ce problème, il suffit de compter-numéroter les coquetiers (le 1, le 2, le 3, le 4, le 5, le 6, le 7, le 8, par exemple) et de compter-numéroter à l'identique les œufs.

Dans une variante de la situation précédente, l'enseignant répartit les rôles entre deux enfants : celui qui est devant les coquetiers doit rédiger un message à celui qui est devant les œufs parce qu'il incombera à cet autre enfant de construire la collection équipotente. On imagine facilement que les élèves vont progressivement prendre conscience que le message 8 fonctionne aussi bien que le message 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 : quand on sait réciter les numéros dans l'ordre, il suffit de mémoriser le dernier pour garder la mémoire de ceux qui précèdent. Les élèves vont ainsi apprendre à nominaliser la quantité qu'ils représentaient auparavant par **une collection de numéros** : pour eux, le mot « huit » vaut pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il devient **le nom de la quantité**.

Or, de nombreux psychologues développementalistes ont longtemps considéré que la réussite à cette tâche attesterait de **l'accès au nombre**. En psychologie développementale, mais non en didactique, cette confusion entre la représentation de la quantité par une collection de numéros et l'accès au nombre a aujourd'hui cessé (*cf.* le 1er texte) : les chercheurs ont redécouvert le rôle fondamental de l'accès aux stratégies de composition-décomposition et, notamment, de l'accès à l'itération de l'unité. Ils considèrent dorénavant que lorsqu'un enfant utilise l'expression « 8 cubes », celle-ci ne désigne authentiquement un nombre de cubes que lorsqu'il sait composer une collection correspondante en utilisant la propriété **d'itération de l'unité** : « 1 cube ; et-encore-1, 2 cubes ; et-encore-1, 3 cubes ; et-encore-1, 4 cubes… et-encore-1, 7 cubes ; et-encore-1, 8 cubes ». Seul un tel comptage permet d'accéder au nombre, **seul un tel comptage est un dénombrement** (on parle de comptage-dénombrement).

On m'a interrogé sur le choix du mot « *collection* » dans l'expression : « dans le cas du comptage-numérotage, la quantité est représentée par une *collection* de numéros ». En effet, on pourrait également dire que la quantité est représentée par une *suite* de numéros. Cependant, l'enfant, dans ce cas, fait un usage opportuniste de l'ordre : celui-ci lui offre la possibilité d'utiliser un message plus court lorsqu'il dit ou écrit « 8 » plutôt que « 12345678 ». Rappelons que Mathieu Le Corre[i] (2014 ; *cf.* le 1er texte) réunit un échantillon d'enfants qui savent tous représenter ainsi des quantités jusqu'à 10 unités à l'aide d'un comptage-numérotage et qu'il leur propose une tâche de comparaison : on dit à l'enfant que dans une boîte fermée il y a 6 poissons et dans une autre 10 poissons ; un animal veut manger le plus de poissons possible ; laquelle des deux boîtes doit-il choisir ? Seule une moitié d'entre eux répond mieux qu'au hasard. Ainsi, l'ordre sur les numéros ne structure pas d'emblée les quantités, il faut parler d'une représentation par une collection de numéros et non par une suite de numéros (il conviendrait encore moins d'utiliser le mot *série*, évidemment).

Par ailleurs, on pourrait objecter que tout cela est affaire de convention et qu'il serait possible de qualifier d'emblée de « numérique » la compétence à représenter les quantités par une collection de numéros (quand 8 vaut pour 12345678) pour ensuite parler de raffinements ou d'enrichissements de cette compétence numérique initiale. Mais ce serait commettre l'erreur avec laquelle Newton a vraisemblablement rompu le premier : le nombre n'est pas une quantité, c'est une entité plus abstraite que la quantité parce qu'il résulte de la mise en relation des quantités. Articulons encore mieux les notions de *quantité* et de *nombre* grâce à la notion de « *nombre de…* » : chez l'enfant, le nombre n'apparaît évidemment pas sous la forme des nombres naturels manipulés par les mathématiciens, il apparaît en tant que « nombre de… » (« 8 cubes », par exemple) mais, dès ce niveau, sa nature est relationnelle, du moins lorsqu'on a authentiquement affaire à un « nombre de… » et non à une simple « quantité de… ». Mettre la même étiquette verbale, celle de « numérique », sur un usage de l'expression « 8 cubes » qui désigne seulement la quantité (quand 8 cubes renvoie à 12345678) et sur un usage qui renvoie à des relations entre quantités (quand l'enfant sait notamment que 8 cubes, c'est 7 cubes et-encore-1), c'est faire obstacle à la compréhension du processus d'abstraction qui permet l'accès au nombre : chez l'enfant, le nombre prend naissance dans la construction d'un « nombre de… » différent d'une simple « quantité de… » parce qu'il renvoie à des relations entre des quantités.

L'hypothèse d'un effet délétère d'un apprentissage scolaire du comptage-numérotage

Mon premier texte n'avait pas seulement pour but d'expliciter la confusion précédente, il visait également à alerter sur les graves conséquences didactiques qui s'ensuivent. En effet, en cas de confusion de la représentation d'une quantité par une collection de numéros et l'accès au nombre, l'enseignement du comptage-numérotage apparaît aller de soi puisque les succès qu'il permet avec les quantités sont interprétés comme autant de progrès avec le nombre. Or l'hypothèse selon laquelle un enseignement scolaire du comptage-numérotage en lieu et place du comptage-dénombrement, a un effet délétère à long terme avec les élèves les plus fragile, se voit chaque année mieux étayée par de nombreuses études empiriques[ii]. Nous y reviendrons dans la conclusion de ce texte.

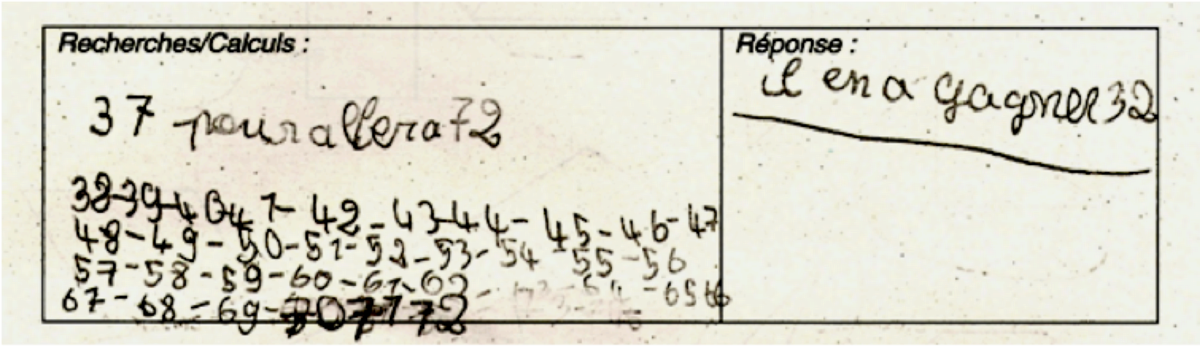
Rappelons qu'un tel point de vue n'a rien de récent en citant à nouveau un couple d'instituteurs maîtres d'application qui travaillaient avec l'Inspectrice Générale Suzanne Herbinière-Lebert (Fareng et Fareng, 1966)[iii] : « … *cette façon empirique* [le comptage-numérotage] *fait acquérir à force de répétitions la liaison entre le nom des nombres, l'écriture du chiffre, la position de ce nombre dans la suite des autres, mais elle gêne la représentation du nombre, l'opération mentale, en un mot, elle empêche l'enfant de penser, de calculer* ».

Rappelons également que deux raisons émergent lorsqu'on cherche à expliquer pourquoi la représentation des quantités par des collections de numéros s'érige en obstacle au progrès vers le nombre. La première est d'ordre langagier. Quand pour un enfant le mot 6 renvoie à 1, 2, 3, 4, 5, 6 et le mot 5 à 1, 2, 3, 4, 5, comprendre que « 6, c'est 5 et encore 1 » nécessite de considérer 6 et 5 à la fois comme des numéros et des pluralités et, de plus, 6 doit être considéré comme 1 parce que c'est le « 1-de-plus ». Ces diverses significations des mots-nombres (comme numéros, comme quantités, comme unité d'une pluralité de numéros) sont inextricablement fondues, ce qui rend difficile leur distinction. Enseigner d'emblée le comptage-dénombrement en employant seulement des noms de nombres permet d'éviter cette confusion dans la tête des élèves.

La seconde raison renvoie à l'efficacité apparente et à court terme de l'enseignement du comptage-numérotage et, donc, à la forte « contagiosité » de l'idée qu'il conviendrait d'enseigner le comptage ainsi : la représentation des quantités par des collections de numéros permet en effet aux élèves, y compris les plus fragiles, de réussir la plupart des tâches scolaires qui leur seront proposées tout au long des cycles 1 et 2. Or, les recherches montrent qu'il s'agit en fait de « faux bons résultats ». Il est difficile à un enseignant de comprendre qu'il doit se méfier de la réussite de ses élèves aux tâches qu'il leur propose ! Le défaut caché est que le comptage-numérotage et la représentation des quantités par des collections de numéros permettent de résoudre la quasi-totalité des problèmes correspondant aux différentes fonctions du nombre **mais sans utiliser les nombres**, en traitant seulement les quantités, et cela qu'il s'agisse de garder la mémoire d'une quantité, de comparer deux quantités, de les égaliser, de mesurer une quantité résultant d'un ajout ou d'un retrait, de chercher un complément, etc.

Nous l'avons vu concernant le problème nécessitant de garder la mémoire d'une quantité (la situation des coquetiers et des œufs). Nul besoin de connaître des relations entre les quantités, c'est-à-dire de connaître les nombres pour réussir. Chez l'élève qui réussit, la représentation des quantités n'est pas nécessairement numérique au sens de Newton, Piaget, Buisson et au sens des principaux psychologues cognitivistes d'aujourd'hui, mais elle est fonctionnelle. La principale difficulté qui surgit lorsque l'école valorise cette sorte de stratégie plutôt que de valoriser d'emblée les stratégies numériques, est que les élèves les plus fragiles s'enferment dans leur emploi parce que le changement de stratégie est coûteux et parce qu'ils en perçoivent mal l'intérêt.

C'est le cas par exemple de cet élève à qui il est proposé le problème suivant (évaluation de fin de CE1) : « *À la récréation, Dimitri joue aux billes. Au début de la partie il possède 37 billes. À la fin, il a 72 billes. Combien a-t-il gagné de billes ?* ». Il le résout ainsi :



Examiné sous l'angle théorique, il apparaît que ce type de résolution se fonde sur un usage des numéros comme s'il s'agissait de billes. Malheureusement, lorsque l'usage de ce type d'objets construits mentalement est installé, il est extrêmement difficile au pédagogue de favoriser l'accès à un niveau supérieur de résolution, celui d'une résolution arithmétique où l'enfant utilise des relations entre les nombres.

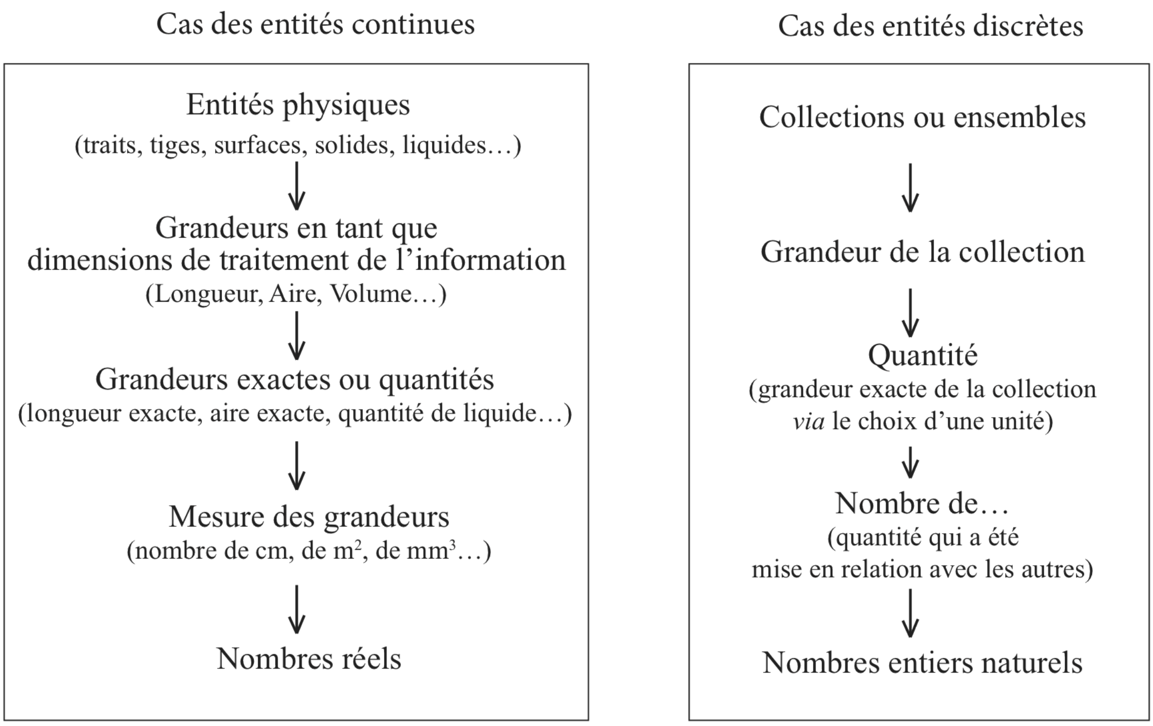
Cela renvoie à un phénomène très général : on a plus de mal à changer d'idée qu'à en adopter une nouvelle non installée. Les enfants dont la flexibilité cognitive n'est pas le point fort paient très cher les succès à court terme résultant d'une représentation des quantités par des collections de numéros. Parmi les résultats scientifiques qui vont dans ce sens, on peut renvoyer à ceux qui sont cités dans la synthèse de l'INSERM[iv] consacrée aux élèves en grande difficulté avec les nombres de manière durable : il y a consensus pour considérer qu'il s'agit d'enfants enfermés dans l'usage du comptage-numérotage et qui ne mémorisent pas de relations numériques.

Grandeur, quantité et nombre : la comparaison discret *vs.* continu

Les mots *grandeurs*, *quantités* et *nombres* peuvent s'utiliser dans deux cas qu'il convient de distinguer : celui des grandeurs continues et celui des grandeurs discrètes que sont les collections. Dans chaque cas, leur emploi s'articule de la façon rapportée dans **la figure plus bas** (les notions sont listées telles qu'elles s'organisent depuis les entités physiques jusqu'aux entités les plus abstraites et les plus structurées que constituent les nombres). La comparaison de l'usage qui est fait dans ce texte et le précédent de ces mots *grandeurs*, *quantités* et *nombres* avec celui des mathématiciens qui ont réfléchi à cette question dans une perspective d'enseignement, va permettre de lever d'autres incompréhensions.

Ce qui frappe, en observant cette figure est évidemment le parallèle entre le cas des entités continues et celui des entités discrètes, parallèle qui se retrouve jusque dans les mots employés. Ainsi, lorsqu'on parle de la « grandeur d'une collection », cela est cohérent avec le sens général du mot « grandeur » en tant que dimension de traitement de l'information : une collection peut être envisagée selon la nature des éléments qu'elle réunit, selon qu'ils sont ou non de la même couleur… et puis elle peut être envisagée selon une autre dimension qu'on appelle sa *grandeur*.

Au-delà de la « grandeur, dimension de traitement de l'information », dans le cas continu comme dans le cas discret, il convient ensuite de distinguer les grandeurs exactes d'une part et la mesure des grandeurs de l'autre. En effet, la longueur exacte d'une tige donnée, par exemple, peut se représenter à l'aide d'un segment tracé sur une feuille, c'est-à-dire par un « segment-témoin », et il ne s'agit évidemment pas encore d'une mesure de cette longueur qui, elle, s'exprime par un nombre de centimètres, par exemple. Par ailleurs, dans le cas des grandeurs continues, on parle de « *grandeurs exactes ou quantités* » parce que le vocabulaire utilisé dépend de la grandeur en question. On parle par exemple couramment de « la longueur de tel chemin » (ou de l'aire de telle surface) et non de la « quantité de longueur



correspondant à tel chemin » (respectivement de la « quantité d'aire correspondant à telle surface) alors que concernant un liquide il est courant de parler de la « quantité de liquide » présente dans tel récipient (la quantité désignée ici est évidemment celle de sens commun, celle qui s'exprime en unité de volume et non la quantité de matière du physicien).

Il convient enfin de noter le parallèle entre la mesure des grandeurs et l'accès au « nombre de… », parallèle qui fait apparaître le « nombre de… » comme la mesure de la grandeur des collections via le choix d'une unité. Il convient de noter une différence entre le cas continu et le cas discret : le choix d'une unité est nécessaire dès l'accès à la grandeur exacte (quantité) dans le cas discret alors qu'il n'est nécessaire qu'au niveau de la mesure dans le cas continu. Une telle différence, liée à la nature différente des grandeurs, n'a rien de surprenant.

Avant d'envisager l'usage qui, jusqu'à présent, a été celui des didacticiens de ces mots *grandeur*, *quantité* et *nombres*, une mise en garde s'impose. La représentation des quantités discrète sous une forme *non numérique* peut se faire de deux façons : soit à l'aide d'une collection-témoin non organisée IIIIIIII, soit sous la forme d'une collection de numéros 12345678, dénommée ou non par le dernier d'entre eux, 8. Le schéma précédent, avec ses flèches qui semblent renvoyer à un parcours, ne signifie pas qu'il faudrait nécessairement que l'enfant transite par la représentation des quantités par une collection de numéros pour accéder au « nombre de… ». On touche là à l'alternative didactique fondamentale débattue dans mon 1er texte :

- Une première possibilité consiste à enseigner le comptage-numérotage à l'école maternelle, c'est-à-dire à favoriser la représentation des quantités par des collections de numéros. Dans un second temps qui se situe généralement au CP, il incombe alors à l'enseignant d'aider les enfants à mettre en relation ces quantités afin qu'ils accèdent aux « nombres de… » (c'est ce qu'il est difficile de faire !).

- Mais une autre possibilité consiste à enseigner d'emblée le comptage-dénombrement et les décompositions, c'est-à-dire à favoriser d'emblée l'accès au « nombre de… », en évitant le détour que constitue la représentation des quantités par des collections de numéros.

On peut décrire autrement cette alternative en se focalisant sur la façon dont l'enseignant parle les quantités :

- Soit l'enseignant, dans un premier temps, s'adapte à la façon dont l'enfant a vraisemblablement commencé à parler les quantités dans sa famille avant de rentrer à l'école maternelle, c'est-à-dire sous la forme de collections de numéros, tout en ayant le plan à long terme d'amener les enfants à les parler différemment, sous la forme de « nombre de… ».
- Soit l'enseignant parle directement et systématiquement les quantités sous la forme de « nombre de… ».

On peut également faire le parallèle avec un enseignant de maternelle habitant une cité et qui enseigne dans l'école de cette cité aux enfants de la cité. Il peut :

- Soit parler initialement à ses élèves comme cela se fait dans la cité (on supposera qu'un « parler relâché », le « parler caillera » par exemple, y est répandu), auquel cas il aura évidemment le projet à long terme de les amener à l'utilisation d'un français plus normé.
- Soit leur parler directement comme le font ses collègues qui n'enseignent pas dans une cité et qui ne connaissent même pas la façon dont on y parle.

Aucun pédagogue ne défendrait le premier choix. Il est intéressant de noter que le nombre est le seul domaine d'apprentissage où, depuis 25 ans, on recommande aux enseignants de ne pas s'exprimer de façon exemplaire.

Longtemps les didacticiens n'ont pas du tout utilisé le mot *quantité*, usant du même mot *grandeur* pour désigner les grandeurs en tant que dimensions et les grandeurs exactes

Le mouvement de réflexion le plus important auquel les mathématiciens français se sont livré concernant le langage qu'ils utilisent pour enseigner leur discipline à l'école primaire, s'est produit dans les années 1970-1990 et il a conduit à la publication d'un ensemble de brochures qui, toutes, avaient pour titre « MOTS ». Ainsi, le tome VI (APMEP, 1982)[v] était consacré aux mots « grandeur » et « mesure ». Les auteurs remarquent que le même mot « grandeur », permet de parler à deux niveaux de généralité selon que l'on désigne les grandeurs en tant que dimensions de traitement de l'information ou bien les grandeurs exactes (la longueur de telle tige, l'aire de telle surface, etc.) (p. 29) :

« De même que *l'homme* peut désigner l'espèce humaine, *la longueur* pourrait désigner l'ensemble des longueurs, *la vitesse* l'ensemble des vitesses, etc. On écrirait volontiers « la Longueur », la « Vitesse », comme on écrit parfois « l'Homme ». Il est à peu près impossible, dans le langage courant, de distinguer ces deux emplois [ceux de « la longueur de cette route » et de la « Longueur », etc.] intimement liés et également légitimes. »

Dans le cas des grandeurs continues, il est vrai que c'est à peu près impossible de distinguer ces deux emplois du fait qu'on ne parle pas d'une « quantité de longueur ». Mais dans le cas discret, il suffit de distinguer la *grandeur* d'une part et la *quantité* de l'autre, comme cela était fait classiquement. Dans le cas des collections discrètes quels mots les auteurs de la brochure MOTS choisissent-ils d'utiliser ? Peut-être ont-ils eu l'intuition que, dans le cas discret, il vaudrait mieux avoir deux mots différents pour les deux acceptions du mot *grandeur* parce qu'ils accèdent à cette possibilité en se mettant à utiliser le vocabulaire de la statistique (p. 78) : ils parlent de *grandeur* et de *population* là où l'on parle ici de *grandeur* et de *quantité* et, donc, ils continuent au niveau suivant selon la même logique en parlant d'*effectif d'une population* en lieu et place d'*un nombre de…* Inutile de dire que cela n'a pas eu d'avenir.

Qu'en est-il dans un écrit plus récent tel que la thèse de Christine Chambris (2008)[vi], par exemple. On y lit (p. 107) que : « *Une grandeur discrète est une classe d'équivalence de collections équipotentes, à savoir qui peuvent être mises en relation par bijection. Le mot quantité est parfois, semble-t-il, utilisé pour désigner une grandeur discrète.* » Et, en cohérence avec sa définition, cette chercheuse fait très peu usage du mot *quantité*, utilisant le mot *grandeur* à la fois pour les deux niveaux de généralité. Il faut le regretter parce que, comme nous allons le voir, faute de disposer de deux mots différents *grandeur* et *quantité*, la compréhension des travaux de la neuropsychologie cognitive devient extrêmement difficile.

Dans le cas des entités discrètes, la didactique devrait faire usage de 2 mots différents, *grandeur* et *quantité* pour pouvoir dialoguer avec la neuropsychologie cognitive

L'usage du mot *grandeur* tel qu'il est préconisé ici, celui qui permet de distinguer la grandeur des collections des grandeurs exactes que sont les quantités, est au centre d'un important débat en neuropsychologie et en psychologie cognitives, sinon sur les faits expérimentaux eux-mêmes, du moins sur la façon de s'exprimer. Certains chercheurs (dont l'auteur de ces lignes) considèrent que les bébés ont pour seule compétence innée la représentation de la grandeur des collections (en anglais *magnitude*), ils considèrent de plus que c'est le même système qui permet aux bébés de se représenter les grandeurs continues et discrète. En revanche, d'autre chercheurs se rallient à la proposition de Stanislas Dehaene[vii] en parlant d'un *système inné de nombres approximatifs* (Approximative Number System) qui constituerait la « bosse des maths » dont disposerait tout petit d'homme à sa naissance.

Concernant n'importe quelle étude expérimentale, les résultats de cette étude peuvent être rapportés en parlant d'une façon ou de l'autre et l'effet produit sur un non-spécialiste du domaine n'est pas du tout le même. Ainsi, dans *Le Monde* du 20 décembre 2013[viii], Stanislas Dehaene écrivait : *Dans la ZEP de Gennevilliers, une maternelle, en s'appuyant sur le matériel pédagogique de Maria Montessori et les principes cognitifs que je viens d'esquisser, obtient des résultats exceptionnels : avant même l'entrée en CP, tous les enfants savent lire et faire des calculs à quatre chiffres !* On est d'abord tenté de penser qu'il a eu un moment d'égarement mais lorsqu'on connaît les expériences sur lesquelles il s'appuie, celles de Gilmore et Spelke (2007)[ix], on comprend ce qu'il veut dire : dans le contexte où l'on a appris aux enfants à représenter les *quantités* par des *collections de numéros* et l'ajout de *quantités* par un déplacement sur une *file numérotée*, les enfants répondent *au-dessus du hasard* à une tâche de comparaison des deux *grandeurs* suivantes: la grandeur de la somme de deux *quantités* et celle d'une quantité donnée. En effet, les collections de numéros, comme toute collection, ont elles-mêmes une grandeur et, sauf à considérer ce phénomène et à en parler avec les mots *ad hoc*, les résultats de l'expérience de Gilmore et collègues sont incompréhensibles.

Bien sûr que les enfants de maternelle ne font pas des calculs **numériques** à quatre chiffres et, par ailleurs, la compétence mise en évidence par Gilmore et Spelke ne prouve nullement qu'il faille enseigner aux enfants à représenter les quantités par des collections de numéros. Mais l'important est ailleurs : seul un usage maîtrisé des mots *numéro*, *grandeur*, *quantité* et *nombre* permet d'avoir un dialogue avec un neuropsychologue comme Stanislas Dehaene.

Donnons un autre exemple : lors du Séminaire National sur l'Enseignement des mathématiques de 2012, Stanislas Dehaene[x] parlait ainsi de l'accès à l'itération de l'unité, c'est-à-dire l'accès à ce qu'il appelle, lui, « le nombre exact » du fait que le « nombre approximatif » serait inné :

« *C'est un grand changement mental. Mais on ne comprend pas très bien ce qui se passe ; il y a une sorte de révolution mentale et un changement théorique très abstrait qui se produit. Si on identifiait proprement chacune de ces transitions, on saurait que là, il faut faire très attention parce qu'il y a quelque chose de crucial qui doit changer.* »

Ainsi, dans le même temps que Stanislas Dehaene considère l'enseignement du comptage-numérotage comme allant de soi, et dans le même temps qu'il propose de renforcer cet apprentissage en utilisant une file numérotée, il a l'intuition du fait que cet enseignement va compliquer l'accès au nombre (exact). Pour comprendre comment il est possible qu'un grand scientifique comme lui puisse être à ce point en contradiction avec lui-même, il faut savoir qu'il ignorait totalement à l'époque que, longtemps, les enseignants français ont évité d'enseigner le comptage numérotage pour enseigner d'emblée l'itération de l'unité sous la forme d'un comptage-dénombrement.

Il faut se réjouir que les chercheurs en didactique des mathématiques invitent de grands scientifiques tel Stanislas Dehaene lors d'événements comme la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques de mai 2012[xi] ou du dernier colloque annuel de l'APMEP mais il serait également souhaitable qu'ils développent l'arsenal théorique permettant de développer un rapport critique à ses exposés. La distinction entre *grandeur*, *quantité* et *nombre* est une composante essentielle d'un tel arsenal théorique.

L'hypothèse du rôle délétère d'un enseignement du comptage-numérotage et l'écriture des nombres à plusieurs chiffres

Depuis 2008, trois thèses de didactique ont été soutenues portant sur la compréhension de l'écriture des nombres à plusieurs chiffres : celles de Christine Chambris (2008), Éric Mounier (2010)[xii] et Frédérick Tempier (2014)[xiii]. Quatre tâches sont notamment utilisées dans ces thèses afin d'évaluer le niveau de compréhension de l'écriture des nombres chez les élèves :

- Une tâche de transcodage : passage du nom du nombre à son écriture chiffrée ou inversement. Avec les enfants de CP, le nom du nombre est traité oralement (lecture ou dictée d'écriture chiffrée), avec les enfants plus âgés il est donné par son écriture en lettres.
- Une tâche de quantification : face à 45 unités, par exemple, pour dire combien il y en a, l'enfant va-t-il les compter 1 à 1, va-t-il faire des groupements de 10 puis compter 10, 20, 30, 40, 45 ou bien dénombrer d'abord les groupes : il y en a 4 donc 40 unités et encore 5, 45 ?
- Une tâche où il s'agit d'écrire le nombre correspondant à une décomposition décimale non canonique : « 13 dizaines + 8 » ou bien « 4 centaines + 13 dizaines »
- Des résolutions de problèmes dont la solution numérique s'obtient assez directement lorsqu'on sait, par exemple, que 138 = 13 dizaines + 8 : « On dispose de 138 gâteaux et on veut former des paquets de 10 gâteaux. Combien de paquets peut-on faire ? ».

Les résultats sont très nets et rejoignent ceux d'autres recherches : la tâche de transcodage est très bien réussie (sauf au CP et début CE1 pour les nombres entre 70 et 99, évidemment), celle de dénombrement voit un grand nombre d'élèves enfermés dans la procédure de comptage : 10, 20, 30, 40, 45 et qui n'accèdent pas à celle consistant à dénombrer des dizaines. Les deux autres tâches sont particulièrement mal réussies.

Ces résultats sont cohérents avec le fait que les enfants continuent à apprendre les écritures des noms de quantités comme ils ont commencé à le faire à l'école maternelle, à l'aide d'un comptage-numérotage et d'une file numérotée. Aujourd'hui, en effet, les enfants rencontrent presque systématiquement les écritures 10, 11, 12, 13… 20, 21, 22, 23… 30, 31… dans ce contexte et ils font correspondre l'écrit et l'oral en s'appuyant sur la récitation de la comptine numérique. En mettant en correspondance terme à terme les mots de la comptine et les cases de la file numérotées, ils apprennent, par exemple, que lorsque le numéro qui figure dans une case est du type « 2§ », il faut le lire « vingt-§ » (22 se lit « vingt-deux », 23 se lit « vingt-trois », 24 se lit « vingt-quatre »,etc.). Ils apprennent à résoudre l'une des principales tâches scolaires (lire et écrire les numéros à deux chiffres) sans aucune référence aux propriétés numériques qui fondent cette écriture, celles d'un changement d'unité de compte : quand une collection est trop grande, plutôt que de dénombrer des 1, on gagne du temps en dénombrant des dizaines parce que l'écriture et la désignation orale des nombres utilise cette grande unité de compte qu'est la dizaine. Ces enfants savent écrire *quarante-cinq* en chiffres par un transcodage asémantique, et non parce qu'ils savent que 45 = 4 dizaines + 5 (voir Barrouillet, Camos, Perruchet & Seron, 2004)[xiv].

Et concernant la tâche de dénombrement ? Comment expliquer le résultat observé ? Fondamentalement, les enfants continuent à compter-numéroter des unités. On leur a dit qu'ils auront un meilleur contrôle de leur comptage en formant des groupes de 10, ce qu'ils font (bien que certains continuent à compter 1 à 1 tellement ils ont été entraînés à le faire à l'école maternelle !). Ceux qui utilisent le groupement par 10 ont compris que le comptage 1 à 1 peut être remplacé par ce qu'on pourrait appeler « un comptage 1 à 1 avec ellipses » : 10, 20, 30, 40. En effet, grâce à l'apprentissage de cette autre comptine : 10, 20, 30…, l'élève dispose d'un raccourci pour aboutir au même résultat que s'il comptait 1 à 1 : il continue à représenter la quantité correspondant aux 45 objets par la **collection des numéros** 1, 2, 3 …/… 43, 44, 45 sauf que, plutôt que d'énumérer tous les numéros, il en dit seulement un sur dix. Il se contente donc de remplacer un comptage-numérotage de 1 en 1 par un comptage-numérotage de 10 en 10, plus rapide. Il ne faut pas interpréter de façon erronée l'usage de cette procédure : elle ne comporte aucune décomposition, l'enfant continue à représenter la quantité de 45 unités par une collection de numéros, sans entrer dans le nombre au sens où celui-ci a été défini ici (voir aussi les analyses de Fuson & col., 1997)[xv]. En revanche, concernant les deux dernières tâches (décomposition décimale non canonique et problèmes aisément résolus en s'appuyant sur la maîtrise des décompositions qui fondent l'écriture des nombres), elles nécessitent d'être entré dans le nombre… et elles sont massivement échouées.

Christine Chambris, Éric Mounier et Frédérick Tempier identifient la cause de ces difficultés dans la façon dont l'écriture des nombres à plusieurs chiffres est enseignée au CP, CE1, CE2… Or, il faut sans aucun doute incriminer également l'apprentissage initial de l'écriture des nombres à l'école maternelle en s'appuyant sur le comptage-numérotage. Sinon, ce serait le seul cas où des enfants qui ont acquis avec succès une compétence essentielle (lire et écrire les premiers numéros à 2 chiffres) selon un processus donné (apparier le comptage des cases d'une file numérotées avec la comptine des numéros) ne tendraient pas à conserver le même processus pour prolonger cet apprentissage dans un domaine plus large.

Le plus problématique est que les élèves réussissent à l'aide de ce comptage-numérotage par 10, ils « réussissent » au sens où ils obtiennent le résultat attendu. Comme cette procédure n'est pas plus longue que la stratégie de composition-décomposition utilisant des groupements de 10, ce ne sera pas facile de les sortir de la procédure de comptage-numérotage par 10. Concernant l'apprentissage de l'écriture des nombres à plusieurs chiffres, le comptage-numérotage apparaît encore une fois comme un « schème dangereux » qui enferme les élèves les plus fragiles dans des stratégies de bas niveau.

Lorsqu'on considère la faible compréhension, voire l'incompréhension, de l'écriture des nombres chez de nombreux écoliers français, quelle est la part de responsabilité de l'apprentissage initial à l'école maternelle et des séquences visant cet apprentissage aux différents niveaux de l'école élémentaire ? Il est impossible de répondre à cette question. Frédérick Tempier (2014) fait une analyse de plusieurs manuels au niveau du CE2 et il n'est pas si sévère que cela avec certains d'entre eux qui sont bien diffusés. Pour autant, en élaborant une ingénierie didactique ad hoc, il parvient à améliorer la compréhension de l'écriture des nombres à ce niveau. En revanche, Éric Mounier qui fait de même au CP obtient des résultats très décevants, presque désespérants[xvi]. L'influence de l'apprentissage du comptage-numérotage en maternelle et au début du CP est évidemment bien plus prégnante au milieu du CP qu'au CE2.

Concluons sur ce point : aucune réponse certaine ne peut être avancée aujourd'hui quant aux responsabilités respectives de l'enseignement à l'école maternelle et à l'école élémentaire. Mais cette question n'est pas essentielle parce qu'il apparaît clairement que les difficultés des élèves dans la compréhension de l'écriture des nombres à l'école élémentaire peuvent s'analyser selon le même modèle théorique que les difficultés qu'on observe déjà à l'école maternelle : elles résultent d'un enfermement dans la représentation des quantités par une collection de numéros. Le vecteur de cet enfermement est un comptage-numérotage de 10 en 10 à l'école élémentaire alors qu'il s'agit d'un comptage-numérotage de 1 en 1 à l'école maternelle mais, d'un point de vue théorique, c'est bien au même obstacle que l'on a affaire.

Ainsi, tout un courant actuel de la didactique dont les travaux portent sur l'écriture des nombres à plusieurs chiffres, avance des résultats qui confortent l'hypothèse d'un rôle délétère à long terme de l'enseignement du comptage-numérotage. Malheureusement, depuis 25 ans environ, d'autres didacticiens s'expriment comme le faisaient les psychologues cognitivistes quand ils confondaient le nombre et la représentation des quantités par une collection de numéros, ils parlent de « dénombrement » ou de « maîtrise du principe cardinal » alors que l'enfant manie seulement des quantités représentée par des collections de numéros, ce qui conduit à attribuer des compétences numériques à des élèves qui n'en ont pas. Leur position a été longuement analysée dans le 1^er^ texte, nous n'y reviendrons donc pas ici.

Une confusion que l'on retrouve dans le projet de programme maternelle

Le programme maternelle va bientôt être publié. Il s'avère que des deux textes de projet proposés en juin dernier, seul le texte court[xvii] (Projet de programme maternelle) a un avenir institutionnel. Le texte long[xviii] (Projet de programme et recommandations) est trop hybride : ce n'est ni un programme, ni un document d'accompagnement et il n'a même pas été demandé aux professeurs des écoles d'en débattre. Malheureusement, c'est ce texte long qui invitait à ne pas enseigner le comptage-numérotage et qui insistait sur l'importance qu'un enfant s'approprie l'itération de l'unité. Reste le texte court qui est un parangon de ce qu'il faut se garder d'écrire lorsqu'on veut éviter les confusions analysées dans ce texte et le précédent. Considérons par exemple ces 4 lignes extraites du préambule de la partie consacrée aux apprentissages numériques :

« *L'apprentissage du code verbal (les noms de nombres) et de sa forme écrite (les chiffres) permet à la quantification de devenir précise, c'est-à-dire qu'elle permet de former ou dénombrer exactement des collections et de pouvoir évoquer et manipuler ces quantités en leur absence.* »

- Dire que la quantification pourrait « *devenir précise* » n'a pas de sens : la quantification permet d'accéder à une représentation exacte, elle est donc précise.
- De même, il est superfétatoire de parler de « *dénombrer exactement des collections* » parce qu'il faut appeler « dénombrement » toute stratégie permettant d'accéder au nombre et parce qu'un dénombrement est nécessairement exact.
- Nulle part dans cet extrait et nulle part ailleurs, il n'est signalé que le *code verbal (les mots-nombres) et sa forme écrite (les chiffres)*, lorsqu'ils sont utilisés dans une expression comme « huit cubes » ou « 8 cubes », renvoient chez certains élèves à un nombre de cubes (dans le cas où ces enfants maîtrisent l'itération de l'unité jusqu'à 8 au moins), alors que chez d'autres élèves la même expression « 8 cubes » désigne seulement une quantité de cubes (dans le cas où ces enfants n'ont pas d'autre moyen d'accéder à la quantité correspondante qu'en utilisant un comptage-numérotage jusqu'à 8).
- Cet extrait du projet de programme laisse entendre que le fait *de pouvoir évoquer et manipuler des quantités en leur absence* serait caractéristique de l'accès au « *dénombrement exact* » (sic). Ce n'est pas exact parce que l'usage de collections de numéros le permet tout autant. Rappelons-nous cet élève de CE1 à qui il est proposé le problème : « *À la récréation, Dimitri joue aux billes. Au début de la partie il possède 37 billes. À la fin, il a 72 billes. Combien a-t-il gagné de billes ?* ». En raisonnant sur des collections de numéros, il *évoque et manipule des quantités de billes en leur absence* alors qu'il est loin de mettre en œuvre des compétences numériques.

On a examiné 4 lignes seulement du projet de programme et les erreurs, approximations et confusions s'y trouvent déjà en grand nombre. Dans la suite du texte, évidemment, le nombre est présenté comme moyen de mémoriser une quantité et un rang sans que les diverses façons de le faire soient distinguées, celles qui sont numériques et celles qui ne le sont pas. Dans le projet de programme ces deux formes de connaissances, les premières numériques et les secondes seulement quantitatives, sont confondues parce que l'itération de l'unité, la propriété qui fonde le nombre, n'y est nulle part évoquée (elle l'est seulement dans les recommandations), parce que nulle part la différence entre comptage-numérotage et comptage-dénombrement n'est présentée et parce que nulle part ne se trouve explicitée la différence entre une collection-témoin organisée et une collection-témoin qui ne l'est pas.

L'enjeu de la levée de la confusion : une école qui produit moins d'échec et moins d'inégalité

Concernant les apprentissages des nombres et du calcul, l'école a-t-elle les résultats qu'une nation comme la France peut espérer ? L'hypothèse d'un effet délétère d'un apprentissage scolaire du comptage-numérotage peut-elle expliquer en grande partie les mauvais résultats constatés ? Certains plaident en faveur de la sérénité. Leurs arguments sont les suivants : une étude récente de la DEPP (2014)[xix] a montré que les performances des élèves à l'entrée au CE2 sont restées globalement stables entre 1999 et 2013 et, donc, il n'y aurait pas le feu à la maison. Et puis, ils pensent qu'il conviendrait d'envisager des causes plus générales, externes à l'enseignement des nombres : la dégradation des conditions de vie et de l'environnement social et culturel des élèves ou le déclin de leurs compétences en lecture.

Rappelons qu'une étude antérieure de la DEPP (2008)[xx] a montré qu'en une période de 12 ans, celle qui suivi la préconisation d'enseigner le comptage-numérotage à l'école (1987 – 1999), les performances en calcul des élèves de CM2 se sont effondrées dans les mêmes proportions quel que soit le milieu socioprofessionnel des parents (ingénieurs, ouvriers agricoles, manutentionnaires…). Par ailleurs, sur la même période, il n'y a pas eu de baisse significative des performances en lecture. Le mot « effondrées » n'est pas exagéré parce que cette étude a montré qu'entre 1987 et 1999 la moyenne générale des élèves de CM2 à une épreuve de calculs variés a baissé de 66% de l'écart-type initial. Or, il faut commencer à s'inquiéter à partir de 20% et une année d'apprentissage dans des enquêtes analogues correspond à 50% de l'écart-type initial environ. Dans la période qui a suivi (1999 – 2007), les performances ont encore baissé mais de manière non significative.

Cette étude est d'ailleurs l'une de celles qui ont conduit Antoine Prost, l'un des principaux historiens de l'école et une personnalité dont l'œuvre le place au-dessus de tout soupçon de « school bashing », à écrire : « *Le niveau scolaire baisse, cette fois-ci c'est vrai* »[xxi] et à poursuivre : « *C'est aux professeurs des écoles et à leurs inspecteurs qu'il revient d'y réfléchir collectivement. Et le temps presse : nous avons un vrai problème de pédagogie qui ne se résoudra pas en un jour* ». La sérénité est évidemment bienvenue au moment d'aborder cette question mais une certaine dose d'inquiétude doit nous inciter à ne pas en différer l'abord et à ne pas se rassurer en disant de façon inexacte : « c'est la faute aux compétences en lecture » ou « c'est la faute à la dégradation des conditions sociales des familles ».

L'enquête plus récente de la DEPP (2014), celle qui met en évidence une stagnation des performances à l'entrée au CE2 entre 1999 et 2013, a-t-elle des résultats plus rassurants ? Il vaut la peine de mettre en relation les dates de ces deux enquêtes : vu les résultats de la première (dégradation chez des élèves de CM2 effective dès 1999, ce qui correspond à des élèves fréquentant le CE2 en 1997), il est presque certain que les élèves entrant au CE2 en 1999 avaient déjà leurs performances dégradées et le fait que celles-ci aient stagné depuis cette date est loin d'être satisfaisant : quand un système fonctionne mal, on ne peut pas se satisfaire qu'il ait cessé de se dégrader. Ces données étayent l'hypothèse d'un effet délétère d'un enseignement scolaire du comptage-numérotage. Soyons plus précis encore parce que la DEPP a fourni d'autres données concernant l'évolution des compétences numériques des écoliers.

Une troisième étude de la DEPP qui étaye encore plus fortement l'hypothèse d'un effet délétère d'un enseignement scolaire du comptage-numérotage

Nous avons jusqu'ici parlé de deux études de la DEPP, l'une qui a comparé les performances des élèves au CM et l'autre à l'entrée au CE2. Or, lors de la sortie de l'enquête CE2, une troisième étude avait déjà comparé les performances des élèves plus en amont encore : à l'entrée au CP, c'est-à-dire chez des enfants qui sortent de l'école maternelle[xxii]. Ses résultats tranchaient avec ceux des études CE2 et CM. D'ailleurs la DEPP, qui les avait publiés en septembre 2013, avait choisi comme titre de sa note : « *Forte augmentation du niveau des acquis des élèves à l'entrée au CP entre 1997 et 2011* ». La presse nationale s'en était fait largement écho : c'était la première bonne nouvelle depuis longtemps. Enfin, l'école française commençait à redresser la barre !

Or, de tels résultats étaient en contradiction avec l'hypothèse d'un effet délétère d'un enseignement scolaire du comptage-numérotage. En effet, à l'école maternelle, pendant la période 1997-2011, l'enseignement du comptage-numérotage s'est effectué de plus en plus tôt et de plus en plus loin, notamment sous l'influence des programmes de 2002 et de 2008. J'ai donc demandé à rencontrer les chercheurs de la DEPP. Nous avons examiné ensemble les épreuves utilisées et il est clairement apparu qu'elles évaluaient presque exclusivement le résultat d'un entraînement au comptage-numérotage. Une seule parmi les tâches proposées ne s'analysait pas ainsi et, en 2011, elle n'était pas mieux réussie que si les enfants avaient répondu au hasard. Ainsi, le progrès observé à l'entrée au CP pouvait-il s'expliquer par l'entraînement au comptage-numérotage reçu à l'école maternelle et il fallait se méfier des conséquences d'un tel progrès : l'hypothèse d'un effet négatif sur le long terme de l'enseignement du comptage-numérotage conduisait à prédire que de tels progrès ne seraient pas pérennes. C'est ainsi que dès septembre 2013, en réaction à l'enthousiasme des médias nationaux pour le redressement des performances des écoliers français à l'entrée au CP, j'ai alerté l'opinion sur le risque majeur de « faux bons résultats »[xxiii].

L'épreuve de vérité est survenue six mois plus tard, en mai 2014, avec la publication de l'étude CE2 évoquée précédemment et dont le titre complet est « *L'évolution des acquis des élèves en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP ne sont pas confirmés* ». On a vu que les résultats des élèves à l'entrée du CE2 sont globalement stables entre 1999 et 2013. Qu'en est-il lorsqu'on procède à une analyse épreuve par épreuve ? On s'aperçoit que dès qu'une épreuve sollicite l'usage de décompositions des nombres, les résultats sont en régression. Ainsi, l'une des épreuves était un problème dont la solution s'obtient assez directement lorsqu'on sait que 87 = 8 dizaines + 7 : « *La directrice de l'école a 87 lettres à envoyer. Elle doit mettre un timbre sur chaque lettre. Les timbres sont vendus par carnets de dix timbres. Combien de carnets doit-elle acheter ?* » Entre 1999 et 2013, le taux de réussite passe de 32% à 18%. Ainsi, un nombre moindre d'élèves en 2013 qu'en 1999 comprennent l'écriture des nombres à l'entrée au CE2, alors qu'en 1999 les performances étaient déjà dégradées.

Lorsqu'une théorie, celle d'un effet négatif sur le long terme de l'enseignement du comptage-numérotage, permet d'anticiper des événements futurs (la disparition d'un progrès apparent deux ans plus tard), lorsque en outre une analyse qualitative montre que l'évolution va dans un sens conforme à la théorie, celle-ci s'en trouve renforcée, c'est la B-A-BA de l'épistémologie.

Tout un ensemble d'études indépendantes qui étayent cette hypothèse

Dans un article récent, deux épistémologues[xxiv] soulignent que les théories scientifiques sont d'autant plus avérées qu'un grand nombre d'études menées par des personnes indépendantes les étayent : « *The strongest sciences have foundations (theories, hypotheses, relationships) that are strongly confirmed by evidence from multiple, independent sources..* » Or les enquêtes d'informations de la DEPP ont été menées indépendamment des travaux des différents psychologues qui, aujourd'hui, en sont venus à considérer l'itération de l'unité comme le fondement du nombre ; et ceux-ci, américains pour l'essentiel, ne connaissaient pas les pédagogues français comme René Brandicourt ou Henri Canac qui, vers le milieu du siècle dernier, prônaient l'enseignement d'une forme de comptage qui théâtralise l'itération de l'unité, ces derniers n'ayant eux-mêmes rien à voir avec les psychologues cliniciens d'aujourd'hui qui décrivent les enfants en difficulté durable avec le nombre comme enfermés dans le comptage-numérotage, qui eux-mêmes ne connaissent généralement pas l'existence de didacticiens des mathématiques comme Christine Chambris, Éric Mounier ou Frédérick Tempier dont les travaux sur la compréhension de l'écriture des nombres vont dans le même sens. Et, à cette liste déjà longue, on pourrait rajouter la sorte de vertige saisissant Stanislas Dehaene qui, alors que son étudiante Véronique Izard vient d'introduire le concept de « nombre exact », prend conscience de la nécessité d' « *une sorte de révolution mentale et (d')un changement théorique très abstrait* » pour que l'enfant accède au nombre exact (en fait : accède au nombre) à partir du « nombre approximatif » (en fait : à partir de la grandeur des quantités lorsqu'elles sont représentées par une collection de numéros).

On se trouve face à tout un ensemble d'études, de points de vue indépendants qui utilisent des méthodologies différentes (enquêtes d'information pour la DEPP, études expérimentales pour les psychologues développementalistes, méthodes cliniques pour d'autres psychologues, remontée des observations des enseignants via la hiérarchie de l'éducation nationale pour les « pédagogues anciens », élaboration d'ingénieries pour les didacticiens d'aujourd'hui, imagerie mentale pour les neuropsychologues) mais qui tous, indépendamment, en viennent à des résultats, des observations, des points de vue qui étayent l'idée qu'il ne faut pas confondre le nombre et la représentation des quantités par une collections de numéros et qui, pour un grand nombre de ces études, étayent l'hypothèse d'un effet délétère sur le long terme d'un apprentissage scolaire initial du comptage-numérotage. Peut-on imaginer qu'aujourd'hui cette idée et cette hypothèse ne soient pas prises au sérieux ?

« Comptage-dénombrement *vs.* comptage-numérotage » et « apprentissage par adaptation *vs.* autres façons d'apprendre » : deux problématiques orthogonales

Avant de revenir au programme maternelle, une dernière remarque s'impose : certains collègues semblent défendre la perpétuation des pratiques pédagogiques actuelles non pas parce qu'elles auraient des bases scientifiques solides, mais parce qu'elles se situent dans le cadre général d'un « apprentissage par adaptation ». On a l'impression qu'ils commencent à percevoir que l'enseignement du comptage-numérotage est un terreau peu fertile pour faire germer des pratiques pédagogiques efficaces, mais celles qu'ils ont élaborées relèvent d'un « apprentissage par adaptation » et ils ont peur de jeter le bébé avec l'eau du bain.

Ils doivent être complètement rassurés : la problématique « apprentissage par adaptation vs. apprentissage qui ne l'est pas » est orthogonale à la problématique « enseignement du comptage-numérotage vs enseignement du comptage-dénombrement ». Des pratiques pédagogiques relevant d'un apprentissage par adaptation et fondées sur un enseignement du comptage-dénombrement existent déjà ; ce ne sont pas les plus diffusées mais elles existent. D'autres sont en cours de développement, comme c'est le cas par exemple dans le cadre du projet ACE qui associe un laboratoire de didactique des mathématiques (celui de Gérard Sensévy), 3 laboratoires de psychologie développementale (avec Jean-Paul Fischer, Bruno Vilette et Emmanuel Sander), ainsi que l'IFÉ avec Serge Quilio.

De manière unanime, les psychologues développementalistes pensent aujourd'hui que le nombre se fonde chez les enfants dans l'appropriation de l'itération de l'unité. C'est récent et il faut profiter de cet événement pour aller vers une *Renaissance* de la didactique des premiers apprentissages scolaires du nombre. L'usage du mot « Renaissance » est intentionnel. Les découvertes scientifiques de la Renaissance n'ont été possibles que parce qu'un mouvement philosophique antérieur avait recommandé aux savants de s'interroger sur le langage qu'ils utilisent pour rapporter leurs réflexions et leurs découvertes. Lancé par des philosophes comme Pierre Abélard ou Guillaume d'Occam, par exemple, c'est ce mouvement de réflexivité des savants sur le langage qui est le leur qui a permis l'explosion de progrès observés quelque temps plus tard.

Il faut souhaiter le même avenir à la didactique des mathématiques : le dépassement de la confusion entre le nombre et la représentation des quantités par une collection de numéros, ouvre la perspective de nouvelles ingénieries didactiques qui n'auront aucune obligation de renoncer à un apprentissage par adaptation. La réduction de l'échec scolaire dépend vraisemblablement de l'existence d'ingénieries qui seront à la fois mieux fondées d'un point de vue scientifique et élaborées en s'appuyant sur les acquis de la didactique des mathématiques.

Il ne faut pas que le programme maternelle perpétue la confusion

Le programme d'école maternelle est l'un des textes didactiques les plus étudiés : qu'il s'agisse d'échanges entre professeurs dans le cadre de la formation continue, d'échanges entre les examinateurs et les candidats au concours de recrutement ou encore des échanges que nécessitent les épreuves de certification des conseillers pédagogiques. Ce texte sert de médiateur dans ces différents dialogues. S'il reste dans son état de confusion actuel, il générera un imbroglio dans les interprétations des différents protagonistes tant la confusion y est grande dans l'utilisation des mots *quantité* et *nombre*. Du fait même de son existence, un tel texte constituerait un frein majeur au progrès de la didactique des premiers apprentissages numériques et, donc, au progrès vers une école qui produit moins d'échec avec les nombres et moins d'inégalité.

Herblay le 8 décembre 2014

---

[i] Le Corre, M. (2014). Children acquire the later-greater principle after the cardinal principle. *British Journal of Developmental Psychology*, *32*(2), 163-177.

[ii] Brissiaud, R. (2013) *Apprendre à calculer à l'école – Les pièges à éviter en contexte francophone.* Paris : Retz

[iii] Fareng R. & Fareng, M. (1966) *Comment faire ? L'apprentissage du calcul avec les enfants de 5 à 7 ans*. Paris, Fernand Nathan.

[iv] Inserm (2007) Dyslexie, dysorthographie, dyscalculie. Bilan des données scientifiques. Paris : les éditions Inserm.

[v] APMEP (1982) *MOTS Réflexion sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs.* Tome VI, Grandeur, Mesure.

[vi] Chambris, C. (2008) : *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse Université Paris 7.

[vii] Dehaene, S. (1997-2010) *La bosse des maths – 15 ans après.* Paris, Odile Jacob.

[viii] Dehaene, S. (2013) *Enseigner est une science*, Tribune dans la rubrique Idées, Le Monde du 20.12.2013.

[ix] Gilmore, C.K., McCarthy, S.E. & Spelke, E. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. Nature, 447, 589-591.

[x] Les sciences cognitives et les mathématiques http://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/cnem_2012_bull_08_bull_1_intuition_en_mathematiques_et_les_demarches_algorithmiques_que_sait_on_en_neurosciences_s_dehaene.8592

[xi] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/manifestations/dossier-manifestations/conference-nationale

[xii] Mounier, E. (2010) : *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse Université Paris 7.

[xiii] TEMPIER F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Thèse Université Paris 7.

[xiv] Barrouillet, P., Camos, V., Perruchet, P. & Seron, X. ADAPT: A Developmental, Asemantic, and Procedural Model forTranscoding From Verbal to Arabic Numerals. *Psychological Review*, 2004, Vol 111, 2, 368-394.

[xv] Fuson K., Wearne D., Hiebert J., Murray H., Human P., Olivier A., Carpenter T., & Fennema E. (1997) Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28, n°2, pp.130-162.

[xvi] Mounier, E. (2014) Communication au colloque 2014 de la Copirelem à Mont-de-Marsan (à paraître)

[xvii] Conseil Supérieur des Programmes (2014) Projet de programme école maternelle consultable le 14 novembre 2014 sur la page http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/6/CSP-PROJET_DE_PROGRAMME_eCOLE_MATERNELLE_337326.pdf

[xviii] Conseil Supérieur des Programmes (2014) Projet de programme et recommandations école maternelle consultable le 14 novembre 2014 sur la page http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP-_Projet_de_programme-recommandations_337324.pdf

[xix] Andreu, S., Le Cam, M., & Rocher, T. (2014) Evolution des acquis en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés. *Note n°19-Mai 2014 de la DEPP*. http://cache.media.education.gouv.fr/file/2014/61/7/DEPP_NI_2014_19_evolution_acquis_debut_CE2_entre_1999_2013_325617.pdf

[xx] Rocher T. (2008) Lire, écrire, compter : les performances des élèves de CM2 à vingt ans d'intervalle 1987-2007. *Note 08.38 de la DEPP ; décembre 2008.* http://media.education.gouv.fr/file/2008/23/9/NI0838_41239.pdf

[xxi] http://www.lemonde.fr/idees/article/2013/02/20/le-niveau-scolaire-baisse-cette-fois-ci-c-est-vrai_1835461_3232.html

[xxii] Le Cam,M., Rocher, T. & Verlet, I. (2013) Forte augmentation des acquis des élèves à l'entrée au CP entre 1997 et 2007. *Note 13.19 de la DEPP ; septembre 2013.* http://cache.media.education.gouv.fr/file/2013/11/2/DEPP_NI_2013_19_forte_augmentation_niveau_acquis_eleves_entree_CP_entre_1997_2011_269112.pdf

[xxiii] Brissiaud, R. (septembre 2013) *Maternelle : de faux bons résultats* http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2013/09/18092013Article635150858806829907.aspx

[xxiv] Fischhoff B. & Davis L. (2014) Communicating scientific uncertainty http://www.pnas.org/content/111/Supplement_4/13664