

Quels outils pour analyser l'activité de preuve en mathématiques à l'école élémentaire ?

Cécile Ouvrier-Buffet

Laboratoire de Didactique André Revuz

Université Paris-Est Créteil

Contexte

- Programmes actuels de l'école en France
 - Cycle 1 : *Apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes*
 - Cycles 2 & 3 : compétences « **chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer** »
 - Cycle 2 : (...) *la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements.*
 - Cycle 3 : (...) *On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements.*

Contexte

- Un intérêt pour la **preuve** en didactique des mathématiques depuis longtemps, à tous les niveaux de la scolarité, mais relativement peu d'articles sur la preuve à l'école élémentaire (6-10 ans)
- **Pourquoi travailler la preuve en élémentaire ?**
 - Mathématiques du citoyen, Représentation de la discipline, Compréhension de concepts, Expériences mathématiques (et IBE), Continuité avec le secondaire, Passage de l'argumentation à la démonstration, etc.

Questionnements

- **Préambule : définir « preuve »**
- **1^{ère} partie** : quels cadres pour étudier la preuve à l'école ?
Sur quels types de situations ?
- **2^{ème} partie** : quelles fonctions de ces cadres pour analyser
une situation de recherche (SiRC) en classe ordinaire
(CM1 / CM2) ?

Définitions (Balacheff, 1987)

- **Preuve** : *une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné (débat pour déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs)*
- **Démonstration** : forme particulière de restitution de la preuve
- **Raisonnement** : *activité intellectuelle explicite ou implicite de manipulations d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations*
- 3 types de situations (avec des contrats spécifiques)
 - **Preuves pour décider** (plutôt du côté de l'action)
 - Preuves pour convaincre (aspects théoriques)
 - Preuves pour savoir

Remarques : fonctions de la preuve + explications, arguments + preuves et liens avec compréhension

Définitions (Balacheff, 1987)

- **Preuves pragmatiques (dans l'action)** : règles d'**action**, théorèmes-**en-acte** non prouvés (validité de l'action interrogée). Discours non forcément présent.
- Importance du caractère **générique**
- **Preuves intellectuelles** (changement de posture) : décontextualiser, dépersonnaliser, détemporaliser
- **Types de preuves** : empirisme naïf, expérience cruciale / exemple générique / expérience mentale, calcul sur les énoncés

La preuve en DDM

- Des processus variés en lien direct avec la preuve
 - Explorations d'un problème (induction) ; Etude de cas particuliers, d'exemples ; Formulation d'un énoncé mathématique ; Formulation de conjectures ; Réfutations, contre-exemples – exploration du domaine de validité de la conjecture ; Modélisation (intra- ou extra-mathématique) ; Production de définitions, de théories locales ; Recherche de 'patterns' ; Généralisations ; Raisonnement par analogie ; Utilisation de différentes représentations, cadres, registres ;
- **ROLE FONDAMENTAL DE L'ENSEIGNANT**
- **A l'école**, en France, à titre d'exemples
 - ERMEL : *Vrai ? Faux ? ... On en débat ! De l'argumentation à la preuve (cycle 3)*
 - Gibel : fct des raisonnements, niveau de milieu, sémiotique peircienne
 - Georget : Situations de recherche et de preuves entre pairs & communautés de pratiques
 - Hersant : problèmes ouverts et émancipation des élèves

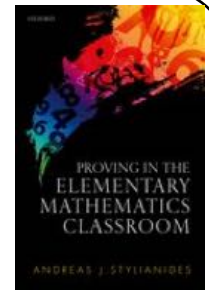
Les recherches sur la preuve ?

- Formation des enseignants de l'élémentaire
 - **Des difficultés connues** pour comprendre et produire des preuves (e.g. Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus, 2002 ; Martin & Harel, 1989 ; Simon & Blume, 1996)
 - L'enseignant doit **encourager** les élèves à justifier leurs solutions, à généraliser (Maher & Martino, 1999), à faire changer les élèves de représentations/ de points de vue, à encourager la classe à être une **communauté mathématique**
 - En CE1-Yackel & Cobb (1996) : élaboration conjointe élèves-enseignant de normes sociomathématiques régulant l'argumentation
 - En CE2, CM1 - Stylianides (2007, 2016) : importance de la dimension sociale et du discours
 - En CM2 - Lampert (1990) (observations inductives de 'patterns', généralisation – focus sur les interactions sociales) & Zack (1997) (conjectures, réfutations, éléments de preuves – focus sur le discours)

Les recherches sur la preuve ?

- Etude de situations particulières
 - Des situations « discrètes » (combinatoire, arithmétique,...) et géométrie (dont TICE)
 - Dans des conditions « favorables »
 - “One has to keep in mind, though, that the elementary school children were observed in classes carefully planned and taught so as to support mathematical reasoning, argument and justification. Therefore, the studies only show that the transition to deductive reasoning is possible, not that it normally happens. And the studies at the high school and college level show that it often does not happen.” (Dreyfus, 1999, p. 96)
 - Exemples : classe de Deborah Ball & de formateurs (Stylianides (2007-2016) – CE2-CM1), classe de Zack (Reid (2002) – CM2), Maher, Powell & Uptegrove (2010) (étude longitudinale CP-CM2 avec formation des enseignants en amont ; aptitudes à preuve dès CM1)
- Et en classe ordinaire ? Et avec un enseignant « ordinaire » ?

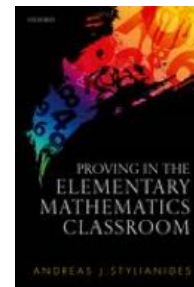
Les recherches de Stylianides (2007 → 2016)



- Définition de “proof” (objectif : une définition souple donc adaptable, adaptée pour les enseignants)

Proof is a **mathematical argument**, a connected sequence of **assertions** for or against a mathematical claim, with the following characteristics:

1. It uses statements accepted by the classroom community (*set of accepted statements*) that are true and available without further justification
 2. It employs **forms of reasoning** (*modes of argumentation*) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
 3. It is communicated with **forms of expression** (*modes of argument representation*) that are appropriate (...) (Stylianides, 2007, p. 291)
- Analyse des **fondements** (définitions, axiomes, énoncés, théorèmes, règles de calcul établies...), de la **formulation** (**modes d'argumentation**) (généralisation, déduction de cas particuliers, contre-exemples, par l'absurde...), de la **représentation** (langage ordinaire, algébrique, diagrammes, etc.) et de la **dimension sociale**.



Les recherches de Stylianides

→ 2 éléments pour catégoriser les tâches de preuve

- Le nombre de cas (un seul, nb fini, nb infini)
- La fonction de la preuve (justifier ou réfuter)
- + "The ambiguity of the task" (on est là proche du problème ouvert !)

• Gestion en classe par l'enseignant

- Dévolution de l'activité de preuve ; inciter à explorer le problème
- Fermer progressivement un problème ouvert / Demander aux élèves de faire des choix
- Laisser vivre des énoncés produits par les élèves (basés sur des hypothèses ou définitions $\neq$)
- Inciter les élèves à (re)formuler ; Inciter les élèves à changer de cadre, à changer d'argumentation
- Gérer les connaissances erronées des élèves
- Montrer l'insuffisance de l'empirisme naïf
- Organiser les débats, les relances, les expériences (filtrer et recentrer)
- Anticiper les difficultés des élèves et les remédiations nécessaires (**à explorer davantage**)
- Identifier les pts importants dans les procédures (mise en commun) et construire ce qui suit
- *Scaffolding* (au sens de Bruner)
- Acceptation de la preuve dans la communauté de la classe (**à explorer davantage**)

Un exemple : La chasse à la bête

Une **S**ituation de **R**echerche pour la **C**lasse (SiRC)

Une variation sur le problème du Pentamino Exclusion de Golomb (1965)

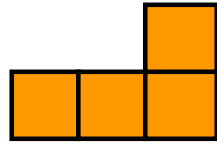
Situations de Recherche pour la Classe

- **Objectifs d'une SiRC**

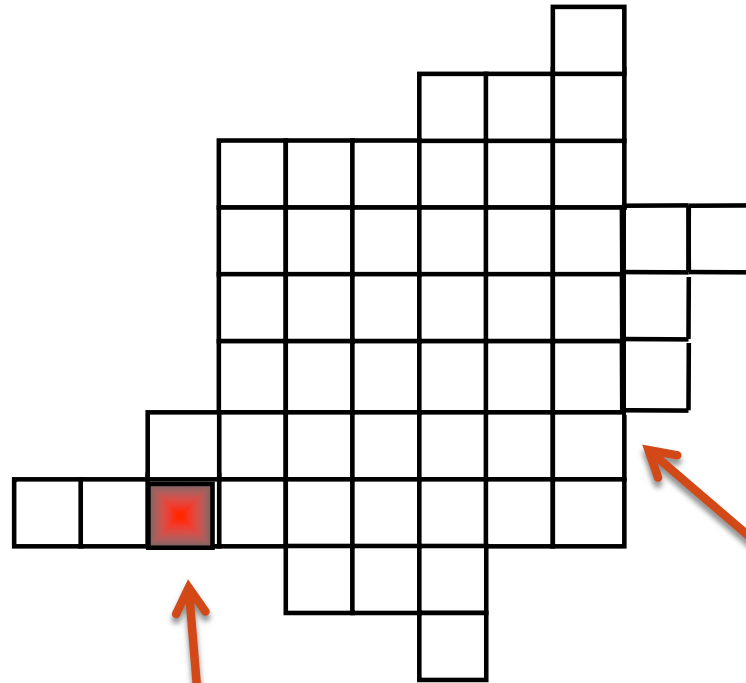
- Placer les étudiants dans le rôle d'un chercheur en mathématiques
- Identifier les raisonnements et preuves des étudiants

- **Définition d'une SiRC** (dérivée de Grenier & Payan, 2003 & Ouvrier-Bufferet, 2009)

- Inscription dans une problématique professionnelle (proximité avec des questions non résolues)
- Problème/Question initiaux faciles d'accès
- Existence de stratégies initiales (pas de prérequis)
- Plusieurs stratégies d'avancée dans le problème et plusieurs développements possibles
- Critères de fin locaux (une question résolue renvoie à une autre question)
- + Gestion de la recherche par les élèves + Communication des résultats



Une bête



Un territoire

Un piège

Problème d'optimisation (NP complet) : quel est le plus petit nombre de pièges pour qu'aucune bête ne puisse se placer sur le territoire ?

Une situation déjà expérimentée

- Essentiellement en collège, au lycée, à l'université (au sein de Maths à Modeler et de l'IREM de Grenoble)
- Robustesse de la situation, stabilité des procédures

Fiche-élève

maths à modeler



La « Chasse à la bête »

On veut protéger un territoire quadrillé (5×5) d'un nuage de bêtes qui veulent se poser. On dispose pour cela d'un grand nombre de pièges. Les bêtes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune bête ne peut se poser en couvrant la case.

Question. Quel est le plus petit nombre de pièges qui protégera le territoire ?

Il y a **trois problèmes distincts**, correspondant à trois sortes de bêtes (elles ne se mélangent pas !), à étudier dans l'ordre ci-après.

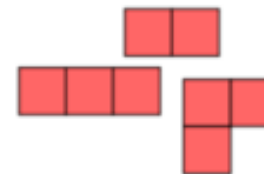
problème 1 : avec les dominos

problème 2 : avec les triminos longs

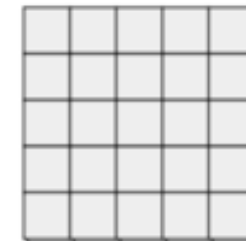
problème 3 : avec les triminos coudés



Pièges



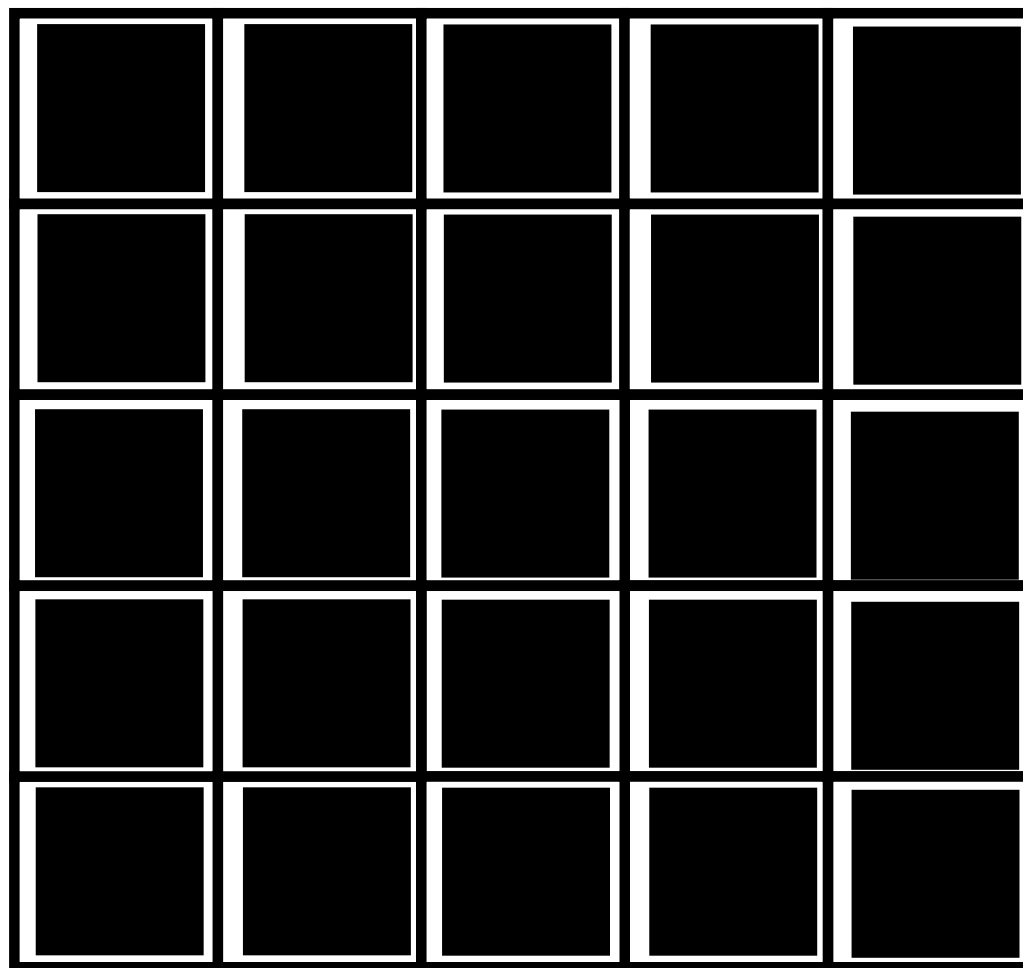
Les trois types de bêtes



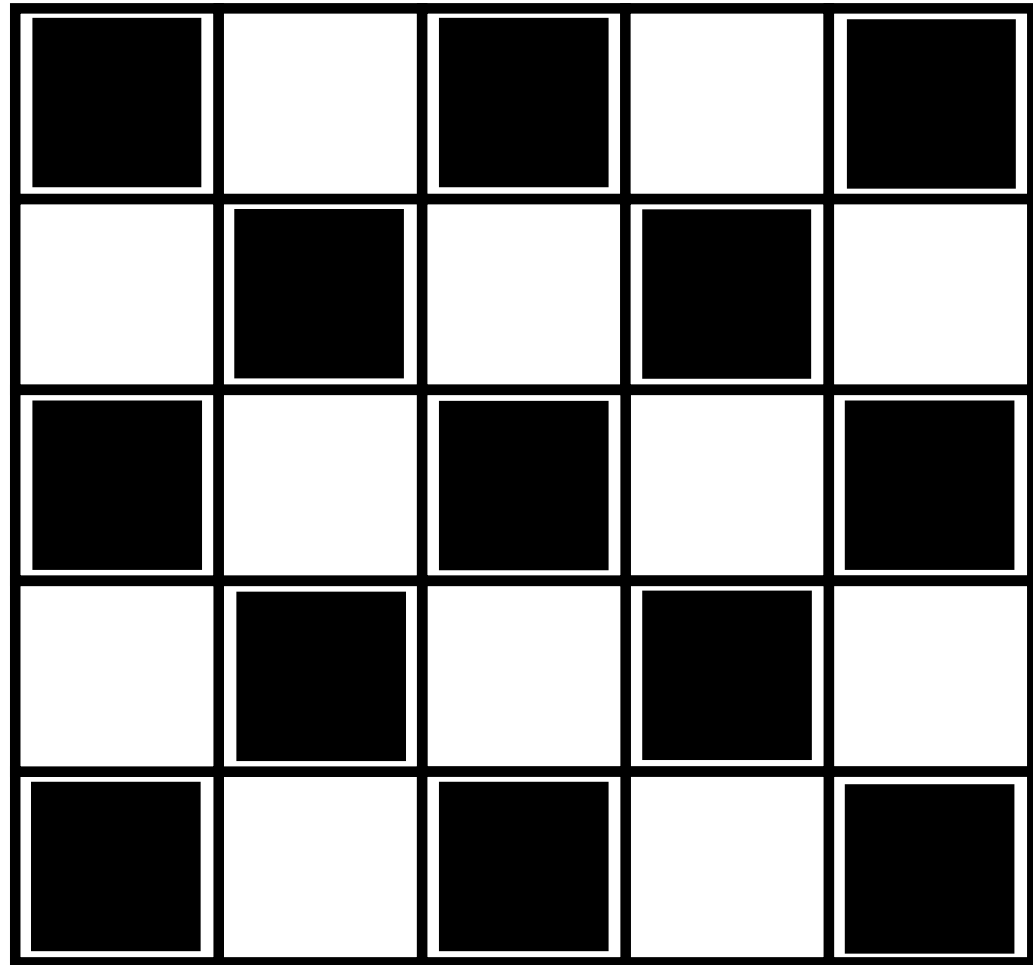
Matériel : un plateau 5×5 , des pièges (petits carrés), des dominos et des triminos. Commencer par les dominos, puis les triminos longs, enfin les triminos coudés



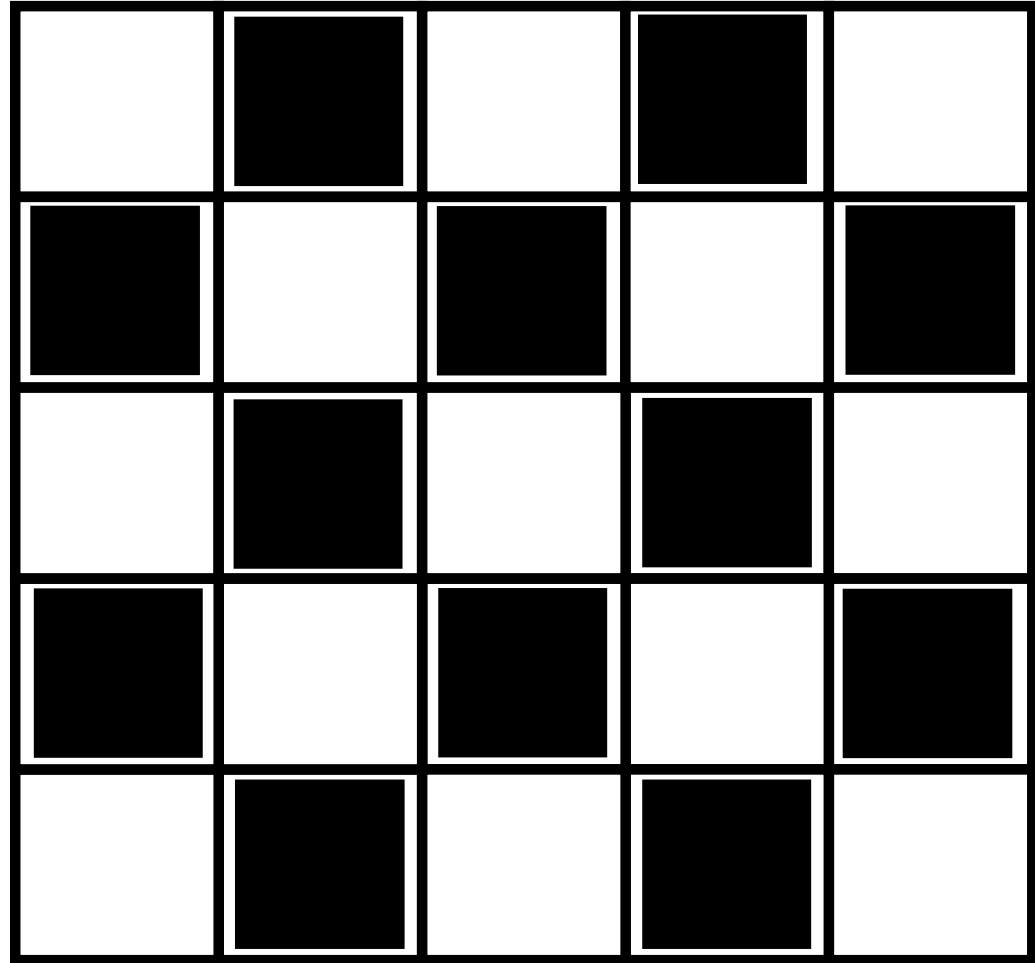
Une bête



Trop facile ! 25 pièges

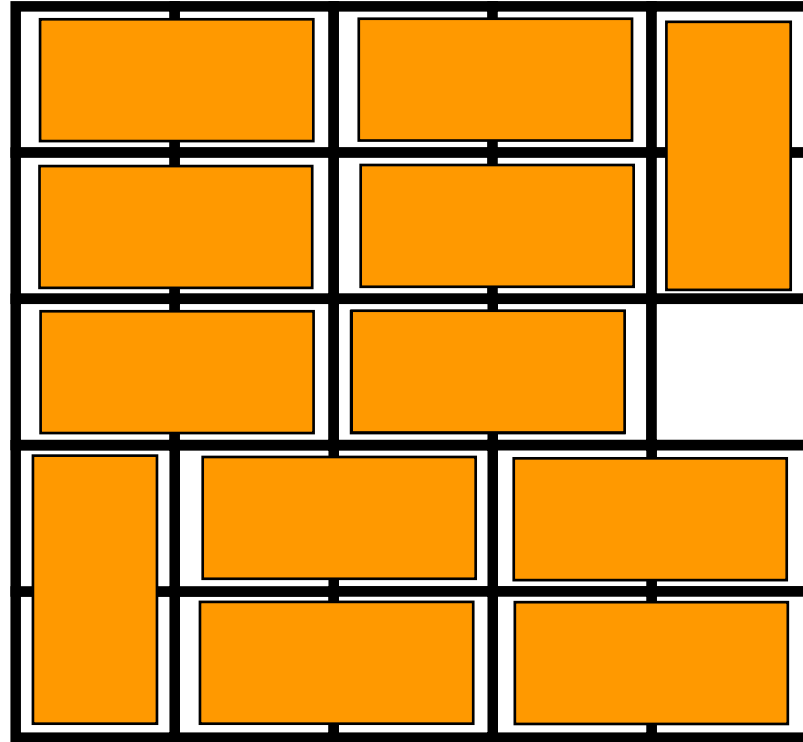


Solution avec 13 pièges



Solution avec 12 pièges

18 Avec la bête “domino”



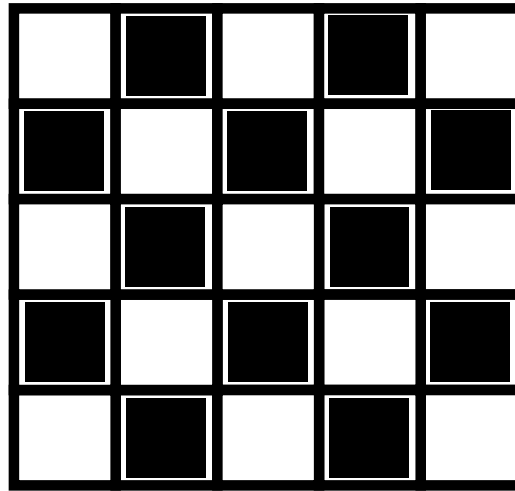
Pavage

*12 bêtes, donc au moins 12 pièges
(borne inférieure).*

*Et on exhibe une solution avec 12 pièges :
ainsi, c'est **optimal**.*

- Un argument : “Si on peut paver le territoire avec x bêtes sans chevauchement, alors il faut au moins x pièges pour chasser la bête du territoire.”

Un argument erroné répandu



- “Si j’enlève un piège, une bête peut se poser. Ainsi, ma solution est optimale.”
- Problème: avec cet argument, la solution à 13 pièges est aussi optimale ! ...
- → différence entre minimum local et minimum global

En classes de CM1/CM2 ?

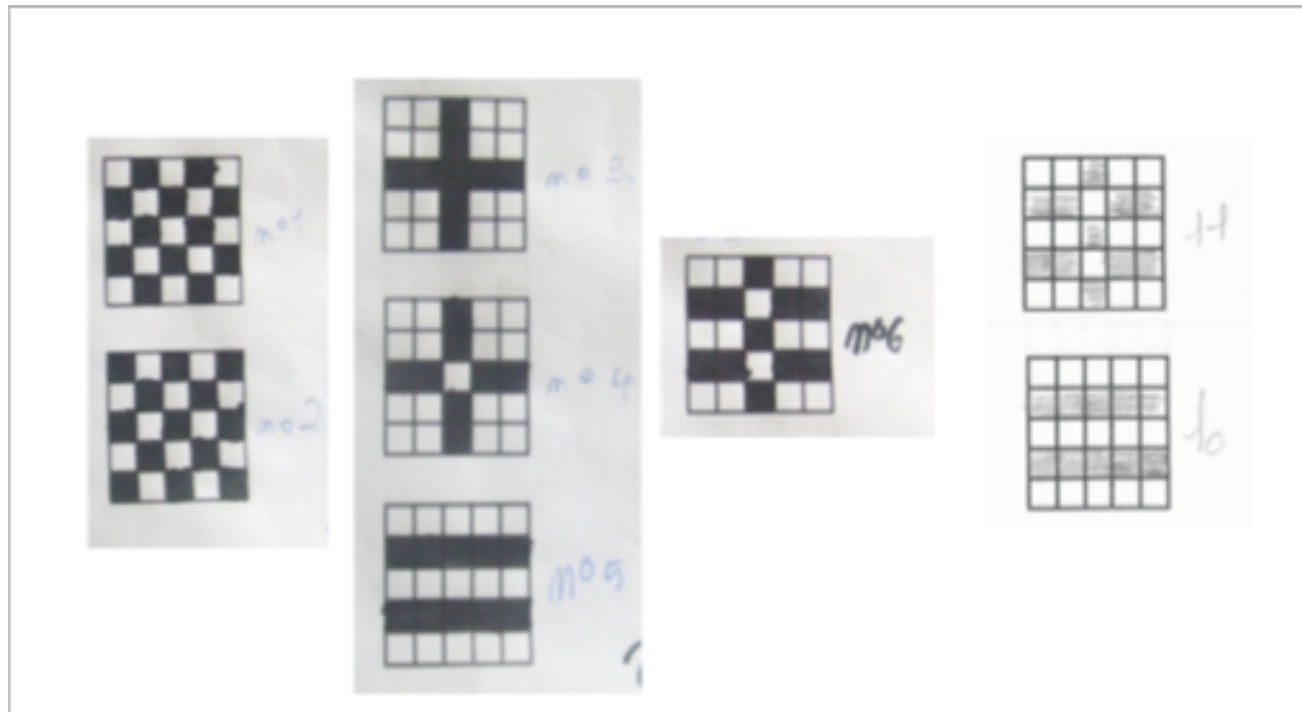
- 5 séances (45 min)

- 
- 
- 
- Séance 1 – **Dévolution** du problème et recherche avec les **dominos**
 - Séance 2 – **Synthèse** au tableau et recherche avec les **triminos longs**
 - Séance 3 – **Mise en commun** et **confrontation** des résultats – institutionnalisations locales (comment prouver que les solutions trouvées sont optimales pour les dominos et triminos longs ? Demande d'**arguments** et de **justifications**)
 - Séance 4 – Recherche avec les **triminos en L**. **Confrontation** des résultats : les preuves d'optimalité sont-elles identiques pour les dominos, triminos longs et triminos en L ? (Retrait du matériel et début de la rédaction des solutions par les élèves)
 - Séance 5 – **Ecriture** des résultats des élèves (chaque groupe a une **responsabilité** pour l'écriture d'un article : présentation du problème, présentation des solutions, preuves des résultats obtenus)

Actions des élèves et difficultés

- Les élèves manipulent les pièges en priorité → **peu d'arguments de pavage**
- Les élèves identifient qu'un **domino recouvre 2 carrés**
“Nous avons mis un piège sur deux car la bête occupe 2 cases”.
- ...
- **Difficulté avec le problème d'optimisation**
l'importance de “au moins” émerge (explicitement durant la confrontation des arguments pour les dominos et triminos) et est **institutionnalisée avec l'aide du chercheur**.

Exemples de productions



Exemples de productions

Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
2 solutions : 12 et 13 obstacles. 11 est impossible.	
Idée 1 : les échecs pour colorier les cases en diagonale.	Idée 1 : 11 c'est impossible.
Idée 2 : pour une bête, il faut 1 piège.	Idée 2 : on essaie de mettre le moins possible d'obstacles sur les bords.
Idée 3 : si on recouvre le terrain, on a 12 bêtes.	Idée 3 : $24 \div 2 = 12$ donc 12 obstacles (à discuter).
Idée 4 : pour chasser une bête, il faut AU MOINS ⁹ 1 piège.	Idée 4 : dans la solution à 13, on a 12 cases blanches, en changeant la coloration on trouve une solution à 12.
Idée 5 : placer les pièges sur chaque ligne.	Idée 5 : on recouvre le terrain avec 12 bêtes et on les chasse une à une et on met 12 obstacles. Quand je veux chasser une bête, combien dois-je mettre d'obstacles ?
Idée 6 : on place 1 piège une case sur deux.	Idée 6 : on place un obstacle 1 case sur 2.
Idée 7 : nombre pair ou nombre impair sur les diagonales ¹⁰ $\Rightarrow$ 11 est impossible.	Idée 7 : $25 \div 2 = 12,5$ donc 12 obstacles car la bête occupe 2 cases.

Tableau 1 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « domino ».

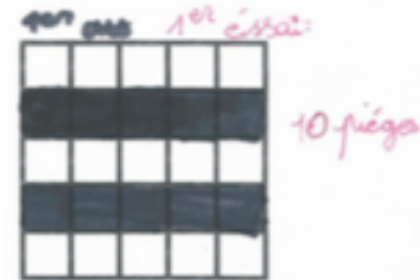
Exemples de productions

Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
Solutions à 8 : sur les diagonales, en croix. Solutions à 9 : sur les diagonales, en croix. Solution à 7 impossible.	1 solution à 9 obstacles et 2 solutions à 8 obstacles : 7 est impossible.
Idée 1 : cela donne une solution à 8 en diagonales.	Idée 5 ¹¹ : on peut placer (au plus) 8 bêtes → 8 obstacles (1 obstacle par bête).
Idée 3 : ici on peut placer 8 bêtes.	Idée 6 : on place un obstacle une case sur 3.
Idée 4 : au moins un obstacle pour chasser une bête. Quand on a 8 bêtes, il faut au moins 8 pièges.	Idée 7 : $25 \div 3 \approx 8,333...$ 8 obstacles.
Idée 8 : (un peu la même que l'idée 5) Pour empêcher les bêtes de se poser en position horizontale, on place une colonne d'obstacles, et pour les empêcher de se poser en position verticale, on place une ligne d'obstacles (au milieu). On enlève ensuite la case du milieu (qui ne sert à rien).	Idée 3 : $24 \div 3 = 8$.

Tableau 2 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « trimino long ».

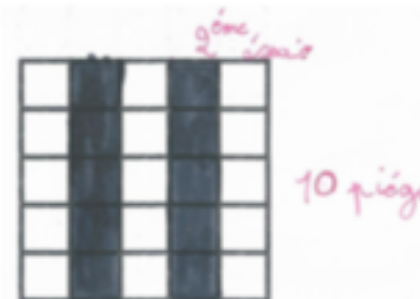
Exemples de productions

1^{er} essai : nous avons mis les pièges horizontalement (10 pièges).



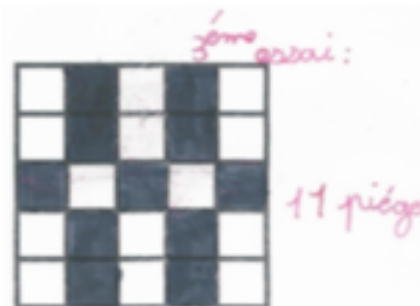
2^{ème} essai : nous avons mis les pièges verticalement (10 pièges).

Sachant que pour chasser une bête trimino en « L » il faut au moins « 1 » (un) piège voire parfois « 2 » ce qui empêcherait la bête de ne pas du tout pénétrer sur la surface.



3^{ème} essai : nous avons aussi essayé de mettre des obstacles une fois sur deux mais ce serait moins bien car il faut 12 ou 13 obstacles (comme la bête domino). Ce qui est bizarre, c'est qu'on a 8 bêtes et 10 obstacles.

On a fait une autre solution, la voici (3^{ème} carreau¹²).



4^{ème} essai : pour chasser 8 bêtes il faut au moins 8 obstacles. »

Des preuves ?

- **En CM1**

“Que peut-on conclure lorsque l’on recouvre le terrain avec les bêtes ? Quand on chasse les bêtes domino on trouve une solution à 12, c’est la meilleure solution pour l’instant. Les bêtes domino on peut en poser 12 maximum, il faut au moins 1 obstacle par bête, du coup 12 dominos, il faut au moins 12 obstacles. Avec les triminos, 1 obstacle par bête ne marche pas, il faut 2 obstacles par bête.”

- **Certains CM2**

$25 \div 2 = 12,5$ avec la bête domino. Cela nous apprend qu’on doit au moins avoir 12 obstacles.

Des preuves ?

La bête trimino en L prend 2 lignes. Ce qui nous a permis de trouver une solution à 10. Pour la trouver, nous avons fait une ligne sur deux. Nous avons sauté la première ligne pour que ça ne fasse que deux lignes de 5 carreaux et non 3×5 carreaux.

Dans une solution de triminos en L, nous sommes obligés de mettre deux obstacles pour une bête. Preuve :

Sur un terrain de 4 cases,



mais parfois 1 obstacle suffit.

Nous sommes sûrs que 8 est impossible car il y a 8 bêtes et que des fois il faut 2 obstacles.



Éléments d'analyses

- **Fonction** de la preuve ici : preuve pour **justifier** (pas pour (se) convaincre, sauf pour le trimino en L « ce qui est bizarre c'est qu'on a 8 bêtes et 10 obstacles »)
- **Evolution** de la situation
 - Jeu sur la variable « territoire » : du carré 5 x 5 au rectangle (généralisation à construire)
- Pas d'expérience cruciale
- Caractère **générique** de certains arguments
- **Règles d'action** et théorèmes-en-acte
 - « $25/2=12,5$ donc 12 obstacles »
 - « pour le trimino en L, 2 obstacles par bête »

Qu'apporte le cadre de Stylianides ?

- Une structuration de l'analyse permettant d'identifier l'activité de preuve et d'importer d'autres cadres théoriques (Balacheff, Vergnaud, Duval, Gibel ...)
 - *Foundations* : techniques de pavage ; procédures de calcul locales ; caractérisation locale d'un couple (nb cases polymino ; nb pièges)
 - *Formulation (modes of argumentation)* : difficulté dans l'expression de l'optimisation, mode déductif, essais nombreux, pas de généralisation interrogée, règles d'action et théorèmes-en-acte
 - *Representations* : manipulations, langage ordinaire, dessins (demandés) etc.
- + *Social dimension*

To be continued

- A caractériser, analyser, explorer ...
 - des situations et progressions (*zéro-compétences* sur la preuve ?)
 - les conceptions des enseignants de l'école élémentaire sur la preuve
 - 4 éléments : (problèmes ; rôle de l'enseignant ; formation nécessaire en amont ; format de ressources)