Colloquium de mathématiques et enseignement des mathématiques - CFEM et ARDM
Vendredi 16 novembre 2018

Penser et organiser les articulations entre abstrait et concret dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université

Viviane Durand-Guerrier
IMAG univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

Institut Montpelliérain Alexandre Grothendieck,
IMAG 5149 UMR CNRS – Université de Montpellier

Dans cet exposé, je me propose de donner des arguments pour soutenir la thèse de nature épistémologique selon laquelle la prise en compte explicite des articulations entre abstrait et concret est une nécessité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tout au long du curriculum de la maternelle à l'université.

Ceci va de pair avec la thèse didactique selon laquelle le travail sur les objets, leurs propriétés et des relations qu'ils entretiennent entre eux jouent un rôle central dans l'apprentissage des mathématiques.

Dans mes analyses, j'adopte un point de vue logique sur la sémantique, suivant en cela Morris (1938) ou Eco (1980)

La sémantique concerne les relations entre les signes et les objets auxquels ils réfèrent.

La syntaxe concerne les règles d'intégration des signes dans un système donné.

La pragmatique concerne les relations entre les sujets et les signes : les signes perçus en fonction de leur origine, des effets qu'ils produisent, et de leurs usages.

Morris, C. (1938). Foundations of the theory of signs, Chicago ; Chicago University Press.

Eco, U. (1980) Segno. Milan : A. Mondatori. Le signe, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Editions

Le concret, c’est de l’abstrait rendu familier par l’usage
(Paul Langevin, 1950)

LANGEVIN, P (1950). *La pensée et l'action*, textes recueillis et présentés par Paul Larenne, préfaces de Frédéric Joliot-Curie et Georges Cogniot, Paris, Les Éditeurs Français Réunis.

La Théorie des Situations Didactiques comme levier pour penser les rapports au monde des connaissances mathématiques

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

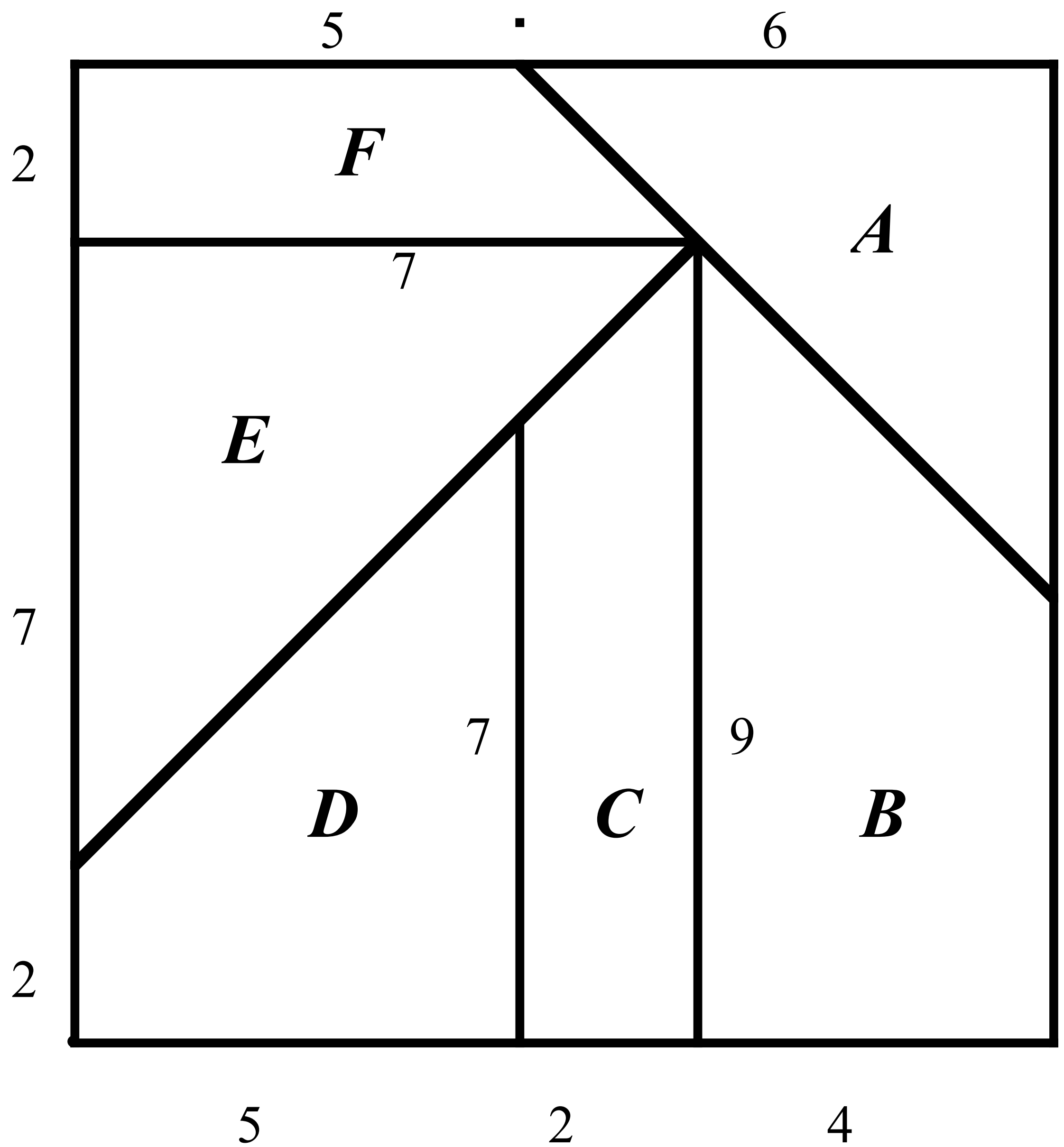
Elle offre une méthodologie de recherche qui permet d'insérer les situations didactiques singulières dans un réseau plus vaste de significations, par la confrontation aux objets (situation d'action), au discours sur les objets (situation de formulation), et à l'insertion dans un réseau de connaissances dans un processus d'argumentation et de preuve (situations de validation et d'institutionnalisation).

Un exemple fondamental

L'agrandissement du Puzzle (Brousseau, 1998)

Consigne

Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction


5
6
2
F
A
7
E
7
7
9
D
C
B
2
5
2
4

Elèves de 9-10 ans

Les élèves travaillent en équipes de 5.

Ils doivent se mettent d'accord sur une méthode commune d'agrandissement, puis se séparent, chacun allant agrandir sa pièce.

Ils essayent ensuite de reconstituer le puzzle

Une méthode erronée attendue : ajouter 3 cm à chacune des dimensions

Ceci ne permet pas de reconstituer le Puzzle;

Après accord sur ce point, les élèves sont invités à chercher une autre méthode

Les élèves sont confrontés au fait que la procédure additive ne permet pas de reconstituer le puzzle: non respect des formes, des angles, du parallélisme.

La réalité résiste ; elle disqualifie le modèle additif et permet de se mettre d'accord sur ce que signifie « conserver la forme ».

Ceci met en évidence le fait que les mathématiques « ont des comptes à rendre au réel ».

Pour agrandir les pièces, il faut multiplier les longueurs de tous les côtés par un même nombre. Pourquoi ?

Conservation de la forme, aspect perceptif

Conservation des angles, aspect géométrique

Proportionnalité des mesures de longueurs, aspect numérique.

Liens avec le théorème de Thalès, l'homothétie, les similitudes

La géométrie comme élaboration conceptuelle stable permettant d'agir dans et sur le monde.

Sinaceur (1991) se référant à Gonseth (1939)

« le sens d'un concept lui vient de la pratique dans laquelle il a été forgé pour des besoins précis. (…).

Ainsi la géométrie des Grecs est une dialectique de l'espace physique à travers l'espace sensible » (p. 195)

« Cette interpénétration remarquable entre intuition et schématisation, formel et non formel, abstrait et concret était déjà présente dans *Les mathématiques et la réalité*, où Gonseth remarquait (p.300) que les éléments du domaine d'un modèle peuvent être pris dans le « monde des choses » ou «dans le monde des abstraits » (op.cit.p.200)

Sinaceur, H. (1991) La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth, in IREM de Lyon (ed.) *La figure et l'Espace*, Actes du 8ème colloque Inter-Irem Histoire et épistémologie des mathématiques, 187-206.

Giusti commente la définition de la sphère donnée par Euclide :

« la sphère est une figure enclose par une demi circonférence qui tourne autour du diamètre jusqu'à revenir au lieu d'où elle était partie » (Euclide Livre X1)

« qui évoque plus le tour de l'ouvrier que le compas du géomètre »

(Giusti, 2000, La naissance des objets mathématiques, p.22)

La géométrie pourrait de même s'accommoder de l'absence d'une valeur simple du point dans la nature, si quelque conception physique complexe se trouvait en jouer le rôle.

Mais la géométrie elle-même nous met sur la voie d'une telle conception. Car il n'est pas vrai qu'elle considère nécessairement le point comme un terme simple. On peut concevoir des systèmes qui posent le point comme composé, et composé de termes plus faciles à interpréter dans la nature.

(J. Nicod, La géométrie dans le monde sensible, chapitre 4 : Points et volumes, PUF, pp. 24-26)

« *Le triangle, le carré, le cercle mathématiques* ne sont peut-être pas des « généralisations » (…) de la vision des *pierres rondes* ou *carrées* comme nous le proposent les empiristes, mais ils sont des reconstructions à l'aide de la mémoire d'une pluralité d'actes d'expériences spatiales. »

Géométrie, Mouvement, Espace: Cognition et mathématiques, Giuseppe LONGO, *Intellectica*, 1997/2, pp.195-218, p. 207)

Un problème en géométrie des solides pour poser la question des relations entre l' Espace et le Plan.

Dias et Durand-Guerrier, 2005, Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM, 60*, 61/78.

Déterminer tous les polyèdres réguliers

Un polyèdre convexe

Les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables (identiques)

A chaque sommet correspond le même nombre de faces

Mise à disposition de pièces en plastique permettant de réaliser des polyèdres.

Ce probleme peut être proposée à différents publics – école primaire, collège, lycée, université, formation des enseignants du primaire ou du secondaire, animations mathématiques.

Le point nodal de la situation réside dans l'impossibilité de réaliser un polyèdre avec des faces hexagonales régulières. Ceci en lien avec le fait que l'on peut paver le plan avec des hexagones réguliers.

Cette situation pose donc de manière « naturelle » la question des relations entre Espace et Plan.

Trois grandes catégories de démarches peuvent être observées :

- *exploration directe avec le matériel*

- *allers et retours entre recherche papier/crayon et exploration avec le matériel*

- *recherche papier/crayon avant toute exploration avec le matériel, voire refus d'une telle exploration*.

La confrontation avec la réalité s'avère le plus souvent cruciale.

Une conjecture fréquente :

Il y a une infinité de polyèdres réguliers, un exactement pour chaque type de polygone régulier.

Compte tenu du matériel disponible, les tentatives de réaliser un polyèdre régulier à faces hexagonales peuvent permettre de remettre en cause cette conjecture, mais cela prend parfois beaucoup de temps, en raison en particulier de la souplesse relative du matériel, et ce quel que soit le niveau considéré.

Pour se convaincre de l'impossibilité, certains participants font parfois référence au fait que l'on peut paver le sol avec des hexagones réguliers.

Une fois cette impossibilité actée, l'émergence de la condition sur les angles apparaît en général. Elle permet de prédire que le nombre maximum de polyèdres réguliers est 5. Le fait de pouvoir les construire garantit leur existence empirique.

.

Cette situation met en jeu une dialectique entre *abstrait* et *concret* bien identifiée par Gonseth*:*

« La dialectique en général et celle de l'espace en particulier résolvent le problème fondamental posé dans Les mathématiques et la réalité, celui de la « connexion » entre subjectif et objectif, pensé et donné, rationnel et réel, théorique et expérimental, abstrait et concret » (Sinaceur, 1991, p.192, à propos de Gonseth*)*

Elle illustre le propos de Longo

« La cohérence et l'objectivité de la construction conceptuelle que [...] nous proposons, dans ce cas la géométrie, se fonde sur l'efficacité de notre action dans le monde car le monde ses symétries, sa connexion, ses régularités s'imposent à nous ou font résistance quand nous agissons ainsi que quand nous proposons une théorie (...)." (Longo , 1997, p.207)

Longo, G. (1997) Géométrie, Mouvement, Espace: Cognition et mathématiques, *Intellectica*, 1997/2, pp.195-218,

La construction du nombre
à l'école primaire
Une dialectique subtile
entre
objets concrets et objets abstraits

Dans son cours pour la XI° école d'été de didactique des Mathématiques, intitulé: « Les grandeurs dans la scolarité obligatoire », Guy Brousseau écrit :

« Les entiers naturels vont apparaître dans la mesure de la grandeur probablement la plus primitive : le cardinal des collections finies. »

A l'école maternelle

Des objets matériels sont posés sur une table.

Ils ne forment pas encore une collection.

On peut *fabriquer une collection* en les rassemblant, en les embrassant du regard, en les entourant de fil, en décidant de les comparer à une collection existante etc..

On obtient alors une réalisation concrète de l'objet abstrait « collection ».

Etant donné deux collections, on peut s'intéresser à la question de savoir si elles contiennent *autant d'objets l'une que l'autre* ou si une des deux collections *contient plus d'objets que l'autre.*

Pour répondre à cette question, on peut réaliser *une mise en correspondance terme à terme.* C'est une *réalisation concrète* qui permet de répondre à une question posé sur des *objets abstraits* (les collections).

Ce protocole est associé à un nouvel objet abstrait (une grandeur) : « *taille d'une collection discrète finie* », et aux deux relations binaires : « *avoir la même taille que* » ; « *être de plus grande taille que* ».

A l'école maternelle (moyenne et grande section), les élèves rencontrent de nombreuses collections, qui deviennent progressivement *des objets concrets*, au sens où dans de très nombreuses situations, les *objets matériels* sont appréhendés comme étant organisés *en collections*.

Pour comparer des collections d'objets matériels qui ne sont pas dans le même espace (par exemple dans deux pièces différentes) et que l'on ne peut pas déplacer, on peut utiliser une collection de référence (par exemple avec des jetons neutres, ou avec des barres sur une bande de papier) que l'on peut transporter dans l'autre pièce. On a ainsi une *collection de référence concrète*, qui permet de travailler en acte la transitivité de la relation « avoir la même taille que ». On peut alors s'intéresser à fabriquer des collections ayant la même taille qu'une collection donnée, ou ayant une plus grande/plus petite taille qu'une collection donnée.

Ceci permet plus généralement de travailler avec des objets concrets la grandeur « taille d'une collection discrète finie », et d'en faire un *objet familier*.

L'étape suivante (grande section) consiste à fabriquer *une famille de collections de référence* à partir de la suite ordonnée des nombres énoncée oralement (*réalisation concrète* d'une *section commençante de N*).

La mise en correspondance terme à terme de différentes collections avec des sections commençantes de N permet d'identifier que pour certaines collections, le dernier mot nombre énoncé est le même, ce qui permet de définir des classes de collections.

Finalement, il s'agit de comprendre que ce dernier mot nombre énoncé permet de répondre à la question « combien y-a-t-il d'objets dans la collection considérée ?».

Ce parcours va permettre la mise en place *du schème du dénombremen*t à la fin de l'école maternelle.

Le schème du dénombrement d'une petite collection :

- coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets,
- énoncé coordonné de la suite numérique,
- cardinalisation de l'ensemble dénombré par un soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé.

Pour Vergnaud, un schème est « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situation donnée ».

C'est dans les schèmes qu'il faut chercher les connaissances-en-acte du sujet, qui permettent à l'action d'être opératoire.

L'automatisation est l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action, ce qui n'exclut pas un contrôle conscient. (Vergnaud 1990, p. 135-136)

Un schème est composé de règles d'action et d'anticipation, d'invariants opératoires (concepts-en-acte et connaissances-en-actes) et d'inférences indispensables à la mise en œuvre du schème.

Exemple d'inférence dans le schème du dénombrement :

- si chaque objet a été pointé une fois et une seule, le dernier mot-nombre énoncé permet de répondre à la question « combien ?» (règle d'action) ;
- chaque objet a été pointé une fois et une seule (prémisse) ;
- le dernier mot-nombre énoncé est la réponse à la question « combien ? » (conclusion).

La stabilisation de ce schème va permettre de s'engager dans la construction des opérations sur les entiers dans une dialectique entre *syntaxe* et *sémantique*.

« Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires*, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets - arguments. »

(Vergnaud 1990, p. 145)

* Concepts en acte – théorèmes en acte – inférences en acte

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherche en didactique des mathématiques*, vol.10/2-3, 133-169.

Construction des entiers naturels

Sémantique : les collections ; les quantités auxquelles renvoient les écritures ou les collections témoins ou d'autres signes utilisés en lieu et place des nombres ; la comparaison par correspondance terme à terme.

Syntaxe : la liste ordonnée des nombres, les règles d'écritures dans un système de numération donné

Pragmatique : l'utilisation ou non du schème du dénombrement ; la reconnaissance ou non des collections témoins ; la manière d'organiser une collection pour pouvoir la dénombrer ; la manière d'utiliser les nombres entiers ; la mise en relation ou non entre écriture et quantité ;

Addition des nombres entiers naturels

Sémantique : L'addition des entiers est définie comme le cardinal de la réunion de deux collections discrètes finies disjointes. Le résultat est indépendant de la nature des objets en jeu sous réserve que mélanger les objets préserve leur intégrité.

Syntaxe : L'addition est définie comme l'itération du successeur ; cela ne nécessite pas la référence aux quantités. Cette définition permet de fonder les algorithmes dans un système donné de numération.

Pragmatique : L'articulation entre les deux aspects se construit par un va et vient entre calculs (syntaxe) et comptage effectif des collections d'objets, incluant les groupements (sémantique). Le comptage effectif permet de valider la commutativité de l'adition d'un point de vue sémantique.

A la fin de l'école primaire, on peut faire l'hypothèse que la fréquentation des nombres entiers naturels et des opérations sur ces nombres a permis de développer une familiarité qui va leur permettre de jouer le rôle *d'objets concrets* (au sens de Paul Langevin) qui pourront être engagés dans de nouveaux apprentissages. Ceci suppose que les actions mises en œuvre sur ces objets fournissent au sujet des informations suffisamment fiables pour soutenir des conjectures d'une part, permettre leur mise à l'épreuve d'autre part.

A l'école primaire, ce sont les collections discrètes qui jouent le rôle de sémantique pour la construction du nombre et des opérations.

A partir du collège, c'est le domaine des nombres entiers naturels qui va servir de sémantique pour la construction du calcul littéral et de l'algèbre.

« Lorsqu'en classe de seconde, l'enseignant passe de l'observation que 2+3 = 5 et 3+2 = 5 à l'écriture de la relation générale a+b = b+a, il passe alors d'un calcul sur les nombres (entier naturel) à un calcul algébrique (à coefficients entiers naturels). En d'autre termes, un calcul algébrique que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique. » (Chevallard, 1989, p.50)

Chevallard, Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation Petit x. Num. 19. p. 45-75.

Introduction au calcul littéral
La somme de 10 nombres consécutifs
(d'après Barallobres et Giroud, 2008)

BARALLOBRES G., GIROUX, J. (2008), Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective, in *Actes électroniques du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.

Trouver le plus rapidement possible la somme de dix nombres consécutifs (entiers naturels)

Par équipe de 4 ou 5 (élèves de 13 ans)

Étape 1 : celui qui trouve la somme a gagné

Série 1 : 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28

Série 2 : 783, 784, 785, 786, 787 788 789 790,791, 792

Étape 2 : Temps de réflexion.

Trouver une méthode pour trouver la somme le plus vite possible quels que soient les nombres proposés par le professeur. Reprise du jeu avec des nombres de plus en plus grands.

Étape 3 : Recherche des raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la méthode marche pour toutes séries de dix nombres naturels consécutifs.

Bilan des méthodes et présentation du travail de chaque équipe.

Deux méthodes reconnues comme les plus efficaces

Celle qui consiste à multiplier le premier nombre par 10 et à ajouter 45, ce qui peut se traduire par la formule 10n+45, acceptée par la majorité de la classe ; elle s'appuie soit sur la décomposition 19, 19 +1, 19 +2, 19 + 3, …. 19+ 9, soit sur la décomposition additive en dizaine et unité 10 + 9, 20, 20 + 1 etc.. Dans ce dernier cas, l'origine de 45 ne va pas de soi.

Une méthode qui consiste à ajouter 5 au cinquième nombre de la liste. Pour la série 1 qui commence par 19, on obtient 235 ; le groupe qui l'a produite déclare avoir observé les différentes séries proposées et les résultats obtenus.

Le milieu construit au cours du travail en équipe par les élèves ayant adopté une stratégie conduisant à la première méthode est a priori plus riche pour la validation que celui construit par les élèves ayant produit la deuxième méthode (point de vue des auteurs).

Cependant, un élève de ce dernier groupe est capable très rapidement de faire le lien entre sa méthode et la première méthode sur la série qui commence par 15, (résultat 195)

« E2 : Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « 4 » ajouté, parce que la première méthode est « fois 10 » et après plus 45.

Professeur : j'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler le premier nombre $\times 10 + 45$, dans notre exemple : $15\times 10+45$

E2 : le 19 est le cinquième nombre, et il a déjà le 4 ajouté ($19 = 15 + 4$). Alors il reste juste le 5, mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini ».

Pour interpréter ce phénomène, on peut

-se pencher sur les actions possibles que les élèves peuvent mettre en œuvre pour obtenir le résultat dans la première étape (*action sur des objets familiers* avec des techniques disponibles)

-faire des hypothèses sur les méthodes auxquelles ces diverses actions sont susceptibles de conduire.

En d'autres mots, il s'agit de tenter de spécifier les différents milieux potentiels pour la validation.

Poser l’addition en colonne

Si on le fait plusieurs fois, avec des nombres de deux chiffres par exemple, le calcul montre que :

- le résultat se termine toujours par 5,
- on a toujours une retenue de 4,
- la somme des « chiffres » des dizaines est égale au premier nombre de la liste,
- le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l’ajout de 4 à ce premier nombre.
- le résultat final s’écrit donc en concaténant le $5^{ème}$ nombre de la liste et le chiffre 5 écrit au début.

Cette manière de faire crée un milieu qui favorise a priori le transfert entre les deux méthodes.

Une autre méthode très rapide est fréquemment proposée . Prendre la valeur médiane et la multiplier par 10

- 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
- 17- 18 - 19 - 20 - 21 - 21,5 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26
- 21,5 × 10 = 215

Ceci peut se justifier par la compensation des écarts.

On rencontre aussi parfois la méthode dite de « Gauss ».

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17

qui conduit à la formule (10 × 43)/2.

Les élèves disposent de nombreuses méthodes de deux catégories distinctes

Des méthodes mobilisant la numération décimale de position: poser l'opération en colonne, calcul réfléchi.

Une méthode consistant à décomposer les nombres avec le point de vue successeur.

Ces méthodes peuvent faire apparaître la formule générale « 10 fois le premier nombre + 45 »

Des méthodes fondées sur la compensation des écarts :médiane, regroupements pouvant faire apparaître la formule : « ajouter le premier et le dernier terme et multiplier par 5 », ou à la manière de Gauss.

Seules les méthodes des deuxième et troisième catégories se généralisent à un nombre quelconque de nombres consécutifs.

Choisir de commencer ou non avec 10 nombres consécutifs est ainsi une variable didactique essentielle de cette situation.

Bien qu'elle ait été initialement prévue pour le collège (élèves de 12-13 ans), on peut proposer cette situation à des publics très variés.

Au cycle 3 de l'école primaire, soit dans le cadre du calcul réfléchi, soit sous la forme d'un problème de recherche pour dégager des règles générales, l'objectif n'étant pas d'introduire des lettres. La validation s'appuie sur les résultats de calcul normalement stabilisés à ce niveau.

On peut utiliser la calculatrice comme moyen de contrôle ; cela permet de voir que c'est beaucoup moins rapide.

Dans la mise en œuvre avec les élèves de telles situations de recherche, il faut considérer : des phases d'actions ; de formulation ; de débat et de validation ; avec des allers et retours entre les trois, avant une institutionnalisation.

.On peut également la proposer au lycée ou en début d'université en relation avec le travail sur les suites arithmétiques pour travailler les relations entre *équivalence syntaxique* et *équivalence sémantique.*

Le jeu (défi) de la rapidité est ici un moteur de la situation qui permet l'engagement des élèves dans l'action, sous réserve que les valeurs choisies leur permettent de faire des calculs conduisant à des résultats auxquels ils peuvent se fier.

Cette situation peut être utilisé en formation pour illustrer:

- ✓ L'importance des expériences faites par les sujets pendant la phase de la situation d'action dans l'évolution du milieu pour la validation.
- ✓ Le fait que la situation de formulation ne suffit pas toujours à elle seule à rendre compte des actions des sujets, puisque des actions diverses, mobilisant des connaissances différentes, peuvent conduire à des formulations identiques.
- ✓ Le fait que l'émergence d'une loi générale doit être confrontée à nouveau aux calculs effectifs (résultats de l'action) afin de pouvoir être validée par chacun des sujets.
- ✓ Elle éclaire l'intérêt des notions de variables didactiques et de milieu de la Théorie des situations didactiques pour penser et organiser les situations d'apprentissage.

- ✓ elle met en évidence l'importance des actions effectives sur des objets suffisamment familiers pour que les résultats de ces actions soient fiables pour le sujet et permettent de s'engager dans un débat sur la validation.
- ✓ Sa mise en œuvre en classe est relativement peu coûteuse, ce qui permet d'observer en situation le jeu entre syntaxe, sémantique et pragmatique.
- ✓ Elle illustre le fait que la multiplication des expériences, en appui sur des *objets familiers*, des méthodes et des connaissances naturalisés pour le sujet, favorise l'élaboration de *nouveaux objets conceptuels* et de leurs *propriétés*, de *résultats nouveaux* et de leurs *preuves*.

Le continu
Entre intuition et formalisation

L'expérience la plus commune du continu est celle du tracé d'une ligne sur une feuille de papier, sans lever le crayon. Les points *disparaissent* dans la trace obtenue ; ils réapparaissent, comme points isolés, lorsque deux lignes se coupent. (Longo 1999)

Cette intuition sert de référence à Dedekind pour sa construction des nombres réels par les coupures, ce qui en fait *une formalisation du contenu intuitif de la droite.*

Longo, G. (1999), The mathematical continuum: from Intuition to Logic. In J. Petitot et al. (Eds.), Naturalizing phenomenology (pp. 401–425). Standford University Press: Stanford

« Mais il est un fait de la plus haute importance : sur la droite *L* il existe une infinité de points qui ne correspondent à aucun point rationnel. (…) nous pouvons affirmer : la droite *L* est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine R des nombres rationnels en individus numériques.
(…) il devient alors absolument nécessaire d'affiner substantiellement l'instrument R, construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres de telle sorte que le domaine des nombres acquière la même complétude, ou disons le tout de suite la même *continuité* que la ligne droite. » (Dedekind 2008, p. 69)

Dedekind, R. (1872). Stetigkeit und Iirrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg. Traduction Française par H. Benis-Sinaceur, in *Richard Dedekind, La création des nombres*, Vrin, coll. « Mathesis », 2008

« Etant donné un point déterminé p de la droite L, tous les points de L se répartissent en deux classes P_1, P_2 contenant tous les deux une infinité d'individus; la première classe contient tous les points à gauche ; la seconde classe contient tous les points à droite. Le point p peut-être au choix rangé dans la première ou la seconde classe. Dans tous les cas, le partage de la droite L en deux classes ou portions P_1, P_2 est tel que tout point de la première classe P_1 est situé à gauche de tout point de la classe P_2. » (p.68)

« Je trouve l'essence de la continuité dans la réciproque, donc dans le principe suivant :

Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la seconde classe, alors il existe un et un seul point qui opère cette distribution de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions. » (p. 72)

Il s'agit de compléter le domaine discontinu des nombres rationnels *R* pour obtenir un domaine continu.

Par analogie avec la droite, Dedekind définit des coupures dans *R* : deux classes A_1 et A_2 telles que tout nombre a_1 de la première classe est plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe.

Tout nombre rationnel opère une coupure de *R*

Il existe une infinité de coupures de *R* qui ne sont pas opérés par des nombres rationnels.

Exemple : soit A_2 la classe des rationnels positifs dont le carré est supérieur strictement à *2*, et A_1 son complémentaire dans l'ensemble *R* des nombres rationnels.

On définit ainsi une coupure de *R* qui n'est opérée par aucun nombre rationnel, car il n'existe aucun nombre rationnel dont le carré est 2.

« (…)Que toutes les coupures ne soient pas opérées par des nombres rationnels est la propriété en laquelle consiste l'*incomplétude* ou la *discontinuité* du domaine *R* de tous les nombres rationnels.

Maintenant, chaque fois que nous sommes en présence d'une coupure (A_1, A_2) non opérée par un nombre rationnel, nous *créons* un nouveau nombre α, un nombre irrationnel que nous considérons comme complètement défini par cette coupure (…). » (p.77)

Le système $\mathbb{R}$ ainsi construit est un ensemble totalement ordonné unidimensionnel, qui possède la continuité:

« IV. Si le système $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels se subdivise en deux classes $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$ telles que tout nombre a_1 de la classe $\mathbb{R}_1$ est plus petit que tout nombre a_2 de la classe $\mathbb{R}_2$, alors il existe un nombre et un seul α par lequel est opéré ce partage. »

L'ensemble ainsi construit est *complet* au sens où la réitération du procédé des coupures ne produit pas de nouveaux nombres. Il n'y a plus de « lacunes ».

“Notre examen du problème du continu est une contribution à la question des rapports entre le donné (intuitif) immédiat et les concepts formels (de la sphère mathématique), concepts à l'aide desquels nous essayons dans la géométrie et la physique, de construire ce donné.” (p.49)

“L'axiome de continuité doit se formuler en sorte de dire que par rapport à un segment unité OE, à chaque point P correspond un nombre réel en abscisse et réciproquement.” (p.114)

(…) *la véritable géométrie de la continuité ne se traite qu'analytiquement*, c'est-à-dire en développant l'Analyse comme une partie de la théorie pure des nombres et en appliquant les théorèmes géométriquement à l'aide du principe de transfert contenu dans le concept de coordonnées. (p. 115)

Weyl, H. Largeaut, J. (1918) *Le continu et autres écrits*. réédition 1994, Paris-Vrin, collection Mathesis

Des recherches sont en cours depuis plusieurs années sur le concept de complétude et donnent lieu à des collaborations internationales (France- Canada – Chili – Tunisie - Italie)

Des constats partagés - Les étudiants arrivant à l'université ont des connaissances très peu assurées sur les nombres, en particulier sur les nombres réels. Ils ne sont pas préparés à comprendre ce que signifie le fait d'être un corps ordonné complet pour l'ensemble des nombres réels. A l'issue des premiers cours d'analyse, le concept de borne supérieure est peu maitrisé et sa pertinence pour conduire certaines preuves en analyse n'est pas reconnue par les étudiants (Bergé 2010)

Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(2), 217–227

La notion d'expansion décimale illimitée reste vague pour de nombreux étudiants en début d'université, en lien avec la distinction infini potentiel/infini actuel

Il faut noter que ceci reste vrai pour un certain nombre d'étudiants titulaires d'une licence de mathématiques préparant le CAPES de mathématiques.

Une hypothèse de recherche : comprendre le concept de complétude est nécessaire pour une appropriation adéquate des principaux concepts et théorème de l'analyse. Ceci nécessite d'avoir identifié que Q et D sont des ensembles incomplets du point de vue de l'ordre (autrement dit ne sont pas des ensembles continus).

La droite numérique et les pratiques autour des représentations graphiques développées dans le secondaire pourraient permettre de proposer des situations permettant aux étudiants de s'appuyer sur *ces objets concrets* pour construire en acte des connaissances sur le concept d'incomplétude, comme préliminaire à la construction de l'ensemble des réels et au concept de continuité (au sens de la complétude).

Les situations de points fixes sont des candidats possibles pour de telles situations (Durand-Guerrier, 2016). Ceci pourrait être préparé dès le lycée, en proposant par exemple des résolutions d'équations dans des sous ensemble incomplets de l'ensemble des nombres réels, entre conjectures dans le domaine graphique et preuves dans le domaine numérique.

DURAND-GUERRIER, V. (2016) Conceptualization of the continuumn an educational challenge for undergraduate students, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*, 338–361.

Faut-il avoir confiance dans le réel pour tenter l'abstraction ?

Affiche déposée en février 2017 dans le bâtiment de mathématiques par une artiste en résidence à l'université de Montpellier.