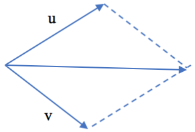
Les croquis et les représentations géométriques donnent-ils du sens ?

Chantal Menini (IREM d'Aquitaine et CIIU)
Pascale Sénéchaud (IREM de Limoges et CIIU)

Colloquium CFEM-ARDM 16 novembre 2018
Concret et abstrait dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université

Si on a

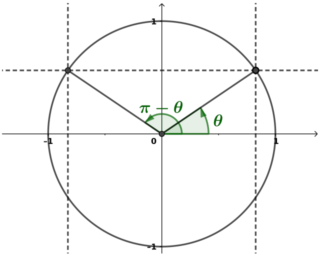


Sens ? Utilité ?

Plan

1. Outil
2. Étape avant la généralisation
3. Image mentale

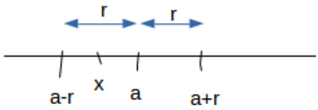
Le cercle trigonométrique



$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta),\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

Il est nécessaire à la construction de la trigonométrie mais il n'est pas plus économique pour les étudiants de reconnaitre une symétrie (et de traduire son effet sur les coordonnées) que de mémoriser directement ces formules.

Distance



Ce croquis doit devenir une concrétisation de l'inégalité $|x - a| \leq r$. Nous l'utiliserons pour parler de « bande » autour d'une valeur lors de l'étude des limites.

Distance

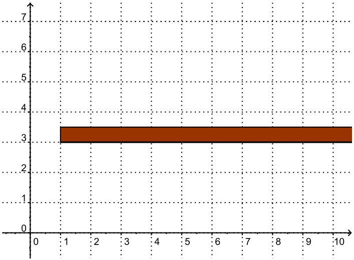
Exemple de travail spécifique

valeur absolue	distance	intervalle	encadrement
$\lvert x-3\rvert \leq 1$			
	$d(x;-4) \leq 2$		
			$-2 \leq x \leq 2$
		$x \in]6,10[$	

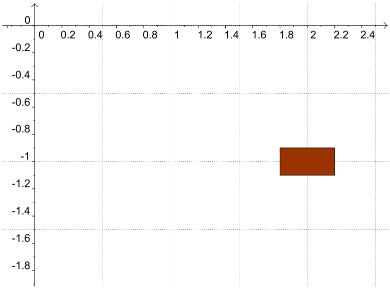
Ne faudrait-il pas y ajouter une 5ᵉ colonne ?

Distance
Exemple de travail spécifique

Donner la définition des ensembles *G* et *H* dont la représentation graphique est



(a) *G*



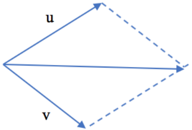
(b) *H*

Espace vectoriel

Eviter des « pièges classiques »

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
i) Si deux vecteurs u et v n'appartiennent pas à un sous-espace F d'un espace E, alors $Vect(u, v) \cap F = \{0\}$
ii) Soit E de dimension n, $F \subset E$*, avec* $\dim(F) = p$*. S'il existe des vecteurs* $v_1, v_2, \ldots v_k$ *linéairement indépendants de E, qui n'appartiennent pas à F alors*
$n \geq p + k$.

On trouve un contre-exemple aux deux affirmations avec :



Espace vectoriel

Les dessins sont une étape pour passer du concret (droites, plans) à l'abstrait (espace vectoriel, sous-espace vectoriel, famille libre, génératrice ...).
Ils doivent aider à

- avoir une image mentale d'un espace vectoriel
- avoir le réflexe de réfléchir a priori à la dimension possible
- changer de cadre

Espace vectoriel

Induire des images mentales et quelques « réflexes »

1) Dessiner un plan vectoriel P et une droite vectorielle D de $\mathbb{R}^3$, D n'étant pas incluse dans P.
2) Dessiner dans $\mathbb{R}^3$, un plan vectoriel P et deux vecteurs u et v non colinéaires, n'appartenant pas à P ; dessiner $P \cap Vect(u, v)$.
3) Dessiner deux plans dans $\mathbb{R}^3$ non confondus, et dessiner une base de chacun d'eux de telle sorte que la réunion des deux bases forme une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Dessiner deux plans vectoriels P et Q dans $\mathbb{R}^3$, non confondus et une droite vectorielle D distincte de leur intersection ; faire des dessins différents selon les dimensions de $D + P$ et de $D + Q$.

Espace vectoriel

Difficultés de mise en oeuvre

- Limitation physique du dessin.
- Images dans le cas de dimensions 2, 3 ou 4, qui peuvent aboutir à une perte d'information dans le cas de dimensions supérieures ou égales à 4.

Espace vectoriel

Perte d'information liée à la dimension

Dans $\mathbb{R}^4$, on appelle hyperplan un sous-espace de dimension 3, plan un sous-espace de dimension 2 et droite un sous-espace de dimension 1.
Quelle est l'intersection d'un plan P et d'un hyperplan H ? Faire un dessin dans $\mathbb{R}^3$ qui symbolise la position relative de P et de H. Que perd-on comme information sur les dimensions dans cette représentation ?

Espace vectoriel
Autres obstacles

- Changement de cadres

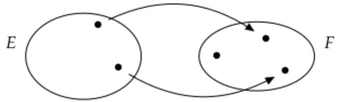
  Comment représenter les vecteurs $1, x, (x-1)^2$ *?*
- *Perception des droites, plans :*
  - *les liens entre équations et ensembles de points vérifiant une équation sont mal perçus,*
  - *mauvaise perception de la notion de dimension.*

Diagrammes

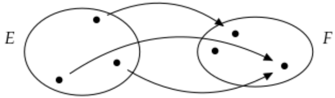
Pour visualiser et se familiariser avec des définitions : injection, surjection. Peuvent-ils avoir une autre vocation ?

Exemples :

Une application injective :

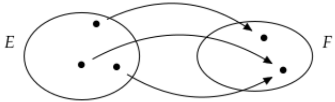


Une application non injective :

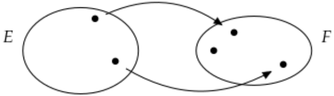


Exemples :

Une application surjective :



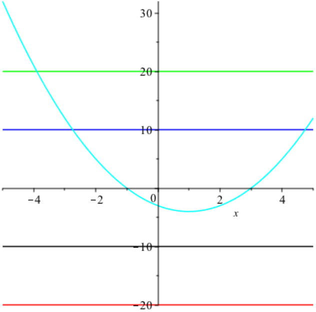
Une application non surjective :



Représentation graphique

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 - 4$

Trouver un intervalle de départ afin que la restriction de f soit injective, puis un intervalle d'arrivée afin que la corestriction de f soit surjective.



Conclusion

- Nous allons reprendre et tester ou faire tester les ingénieries reprises ici, analyser des exercices utilisés actuellement.
- D'autres croquis tels que ensembles, compositions de fonctions... qu'en dire au regard de la classification proposée ici ?

Merci pour votre attention.