

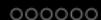
Les abstractions informatiques peuvent-elles concrétiser les mathématiques?

Emmanuel Beffara

Institut de Mathématiques de Marseille, Université d'Aix-Marseille

Colloquium ARDM-CFEM, 16 novembre 2018

- 1 Introduction
- 2 L'instrumentation
- 3 Le rapport aux objets
- 4 Les abstractions informatiques
- 5 Calcul et démonstration
- 6 Conclusion



Introduction

D'où je parle

- Mon domaine de recherche: théorie de la démonstration et sémantique des langages de programmation, un pied en mathématiques et un pied en informatique fondamentale.
- Mon expérience d'enseignement: en informatique et en mathématiques à l'université, en formation initiale et continue d'enseignants pour l'informatique dans le secondaire.
- Ma préoccupation ici: ce que peut dire l'interaction entre logique mathématique et informatique dans le contexte de l'enseignement.

L'instrumentation

L'instrumentation en mathématiques

L'emploi d'instruments est aussi vieux que les mathématiques:

- bouliers et autres abaques,
- règles et compas,
- variétés d'un instruments de mesure. . .

L'informatique est née du besoin d'instrumentation:

- calculs numériques,
- simulation,
- visualisation,
- calcul formel. . .

L'outil informatique dans l'enseignement

Les instruments font partie de la pratique mathématique, ils arrivent donc naturellement dans l'enseignement.

Utilisation de calculatrices et de logiciels:

- calculs numériques
- tracé de courbes
- géométrie dynamique
- calcul formel

Les usages possibles sont nombreux.

Automatismes et automatisations

Les étapes de l'instrumentation du calcul:

1. découverte de techniques de calcul,
2. systématisation de la technique,
3. développement d'automatismes et d'intuitions associées,
4. transfert de la tâche automatique vers la machine.

Ce processus nécessite de comprendre les objets et leur manipulation avant de s'économiser les calculs faits à la main.

Cela s'applique dans le cas du calcul *exact*, dans le domaine du *discret*. Qu'en est-il dans le domaine du *continu*?

Le rapport aux objets

Calcul numérique

Les nombres:

- en mathématiques: entiers, décimaux, rationnels, réels;
- en informatique: la notion de précision est incontournable quand on parle des réels.

Comment les différentes notions de *nombre* sont-elle comprises?

En statistiques, l'outil informatique permet de travailler avec de vrais jeux de données et de mesurer la sens des notions (moyenne, médiane, écart type. . .)

Fonctions

Qu'est-ce qui se cache derrière le mot *fonction*?

- en mathématiques savantes: une relation
- en informatique: un procédé de calcul

Et dans l'esprit d'un élève?

Les notions mises en jeu:

- notations algébriques et leur interprétation opératoire
- le calcul littéral et l'emploi de variables

Géométrie

S'affranchir des difficultés liées à la construction de figures à la main...

- on gagne en rapidité et en précision
- on peut faire bouger les objets
- on peut mesurer et conjecturer

Limite de l'utilisation de l'outil:

- le ressenti « physique » des constructions géométriques?
- l'illusion de l'exactitude?

Mais la géométrie est *l'art de raisonner juste avec des figures fausses...*

Les abstractions informatiques

L'informatique est aussi une science

Quand on emploie des outils informatiques, on ne peut pas faire l'économie d'une étude de la démarche informatique elle-même.

Les quatre piliers de l'informatique:

- machine
- information
- algorithme
- langage

Concret et abstrait en informatique

Concret:

- machine
- programme
- effectivité du calcul

Abstrait:

- algorithme
- information
- complexité

Le lien se fait par le *codage*.

Représentation de l'information

L'informatique ne traite pas les objets mathématiques mais leur représentation symbolique.

- Il est nécessaire de distinguer l'objet de son écriture.
- Le nombre n'est pas son écriture en chiffres.

En dehors du discret, la représentation induit une restriction de l'espace des objets:

- nombres décimaux et leurs analogues
- fonctions calculables

Quel rapport entre l'objet mathématique et l'objet informatique?

Algorithmique

Un algorithme est une méthode systématique et non ambiguë permettant de résoudre un problème calculatoire formellement posé:

- concerne des objets mathématiques abstraits,
- suppose une *généricité*.

L'algorithmique consiste à étudier la faisabilité du calcul.

Enseigner les abstractions informatiques

Avec la machine:

- micro-mondes pour la programmation
- utiliser les outils pour comprendre les représentations

Sans la machine:

- informatique débranchée
- mathématiques discrètes

Calcul et démonstration

La programmation comme discipline de pensée

D'ailleurs, dans le vocabulaire informatique

- type concret = définition de la représentation d'une information à partir de types d'information plus primitifs
- type abstrait = spécification d'un objet par les opérations qui lui sont associées, approche axiomatique

L'approche constructiviste poussée à son terme:

- construction des objets mathématiques comme des logiciels
- les notions et théories mathématiques comme interfaces de programmation
- généralisation et modularité

La démonstration assistée par ordinateur est une forme particulière d'ingénierie logicielle.

Stratégies de calcul et de démonstration

L'algorithme est une stratégie de calcul,
la démonstration est une stratégie d'argumentation.

- énoncé = type d'information = terrain de jeu
- démonstration = programme = stratégie
- exemple = exécution = partie

Une démonstration peut être vue comme un algorithme pour gagner dans une argumentation visant à justifier une assertion.

Cette analogie prend une forme très précise sous le nom de *correspondance de Curry-Howard*, élément central en théorie de la démonstration et des langages de programmation.

La logique comme fondement commun

La logique est au fondement des mathématiques comme de l'informatique.

- Gödel (1931): théorèmes fondés sur l'idée de *codage*
- Turing (1936): formalisation de la notion de *calcul*
- Church (1930–): approche du calcul par le *langage*
- Von Neumann (1945): notion de *machine* universelle

Conclusion

Conclusion?

Les objets:

- dans le discret: prolongement des automatismes
- dans le continu: approche « dynamique » de l'infini

La démarche opératoire:

- algorithme comme stratégie de calcul
- démonstration comme stratégie de démonstration

Les abstractions informatiques peuvent-elles concrétiser les mathématiques?

- donner un sens opératoire aux raisonnements
- proposer des cadres d'expérimentation pour les notions abstraites
- se confronter aux questions liées spécifiquement à l'écriture des objets