Réparer l'enseignement des mathématiques Le faut-il et comment ?

Introduction à un débat

L'éducation est au cœur des débats politiques, en France (ce fut encore le cas lors de l'élection présidentielle) comme dans bien d'autres pays.

Parmi les questions que pose l'éducation, l'enseignement des mathématiques tient une place privilégiée.

Il y a à cela plusieurs raisons, amplifiées en France par l'héritage de Descartes et la classification de Comte qui ont installé les mathématiques sur un piédestal voué à l'adoration des savants et à la sélection des élites.

Mais il y a aussi des raisons internes à la discipline. On pourrait, paraphrasant une célèbre remarque d'Engels (dans sa Préface à la troisième édition du 18 Brumaire de Louis Bonaparte de Karl Marx), remarquer que les mathématiques constituent le savoir où les contradictions entre les diverses formes de connaissance et celles de leur transmission prennent les contours les plus nets.

C'est le cas aujourd'hui, avec le débat qu'on peut résumer ainsi : faut-il enseigner les mathématiques pour elles-mêmes ou bien comme moyen essentiel de comprendre le monde dans lequel nous vivons ?

Une polémique est née aux États-Unis, à la suite de la publication de propositions dues à deux auteurs bien connus dans le milieu américain des mathématiques : l'un, Solomon Garfunkel, éducateur à la tête d'un consortium qui diffuse des matériels pédagogiques (COMAP), et l'autre, David Mumford, mathématicien de renom, qui proposent de mettre au cœur de l'enseignement des mathématiques dans les études pré-universitaires leur rôle comme modèle pour comprendre et agir dans le monde réel.

Cette polémique s'est propagée en France lorsque nous avons publié la traduction de cet article, que nous reproduisons ici, dans le journal Le Monde du 14 septembre 2011, et pour laquelle nous avons organisé une rencontre le 4 avril dernier ⁽¹⁾ avant d'ouvrir ce débat.

(1) <http://www.math.jussieu.fr/~kantor/ihp-04-04-12/>

Peut-être a-t-elle été aussi favorisée par l'annonce des mauvais résultats obtenus par la France dans l'étude PISA (enquête menée tous les trois ans parmi les jeunes de quinze ans de 65 pays dont les 34 pays de l'OCDE, pour vérifier leurs connaissances).

Il faut d'abord remarquer que le débat dépasse le simple enjeu de l'enseignement des mathématiques, puisqu'il recoupe les critiques souvent faites à notre enseignement soit d'être trop abstrait, soit de servir d'outil de sélection sociale, ces deux reproches étant souvent mêlés. Ainsi une trace de préjugés sociaux explique peut-être la virulence de certaines réactions venues de milieux universitaires traditionalistes.

La revue Commentaire a bien voulu me demander d'organiser un débat sur cette importante question. D'où le dossier que nous avons constitué, et que l'on trouvera ici. Il réunit des contributions de mathématiciens, chercheurs et enseignants, français et étrangers, et de praticiens des mathématiques et de leur enseignement. Il veut éclairer un débat qui doit se poursuivre.

On trouvera à la suite du texte originel de Solomon Garfunkel et David Mumford diverses contributions, classées par ordre alphabétique : celle de la Commission sur l'enseignement de l'Académie des sciences, puis celles de Pierre Arnoux, de Michèle Artigue, d'Éric Barbazo, de Dominique Barbolosi, de Werner Blum, d'Alexandre Borovik, de Jean-Pierre Demailly, de Laurent Gouzenes, de Michael Harris, de Joseph Malkevitch, de Joël Merker, d'Yves Meyer, d'Olivier Rey, de Nathalie Sinclair et d'Alexei Sossinsky qui a enseigné pendant de nombreuses années à Moscou.

Un regard vers le passé

Les mathématiques ont toujours présenté un double visage, dès l'Antiquité grecque, celui d'outil de connaissance du monde et celui de réflexion autonome sur elles-mêmes, sur le nombre, l'espace et les processus logiques de son fonctionnement. Ce double visage se reflète par exemple dans la conception des mathématiques de Platon et d'Aristote, ou encore dans le rejet, dès le quatrième siècle av. J.-C., de constructions géométriques (comme la neusis) utilisant des outils moins « purs » que la règle et le compas. Ce double aspect a pris différentes formes à travers les cultures et les siècles. L'enseignement des mathématiques dans la Chine ancienne nous donne ainsi l'exemple d'un point de vue radicalement différent ⁽²⁾. Avec la révolution scientifique moderne, les mathématiques sont devenues la clé et le langage des sciences de la nature. Diderot distingue nettement deux sortes de mathématiques, pures et mixtes.

« Les mathématiques sont les sciences de la quantité. Certains mathématiciens étudient la quantité abstraite, les géomètres qui étudient la quantité abstraite étendue et les arithméticiens qui étudient la quantité abstraite nombrable. Ce sont les deux parties de la science pure. » Les mathématiques mixtes, en revanche, n'étudient pas la quantité seule ou indépendamment des individus réels et abstraits, elles ont donc « autant de divisions et sous-divisions qu'il y a d'êtres réels dans lesquels la quantité peut être considérée » ⁽³⁾.

Cette distinction préfigure la distinction entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. Avec le développement des applications, le terme de modèle a été utilisé chaque fois qu'une situation complexe pouvait être partiellement décrite en termes mathématiques.

(2) Man-Keung Siu et Alexei Volkov, « Official curriculum in traditional Chinese mathematics : how did candidates pass the examinations ? », *Historia Scientiarum*, 1999, n° 9 (1), p. 87-99.

(3) Diderot, *L'Encyclopédie*, « Explication détaillée du système des connaissances humaines ».

Au XX^e siècle, la division entre mathématiques s'est renforcée, en particulier en France où l'école inspirée de la tradition allemande, celle de l'axiomatique hilbertienne, a imprimé sa marque dans les progrès de la science comme dans l'enseignement des mathématiques par l'intermédiaire de la réforme des « maths modernes » des années soixante et la prégnance du groupe Bourbaki, qui a conduit à une domination des mathématiques pures (algèbre, géométrie, théorie des nombres) et au rejet ou tout au moins au désintérêt temporaire pour les domaines paraissant secondaires comme la logique, les probabilités et les applications.

La situation s'est inversée à partir de la fin des années soixante avec la révolution informatique qui a accru l'intérêt pour les langages et la logique et a décuplé la puissance des outils de calcul. Les relations des mathématiques avec les autres sciences ont repris de l'importance, et on a pu même parler d'une numérisation universelle de nos sociétés technologiques avancées.

Plus récemment encore, les frontières entre les domaines des mathématiques se sont estompées, comme le montrent les exemples récents d'attributions des médailles Fields (l'analogue des prix Nobel pour les mathématiques) ou encore le cas du prix Abel (du nom d'un célèbre algébriste norvégien du XIX^e siècle).

Le prix Abel, destiné à récompenser des travaux mathématiques fondamentaux, a été décerné pour la première fois en 2003 à Jean-Pierre Serre, célèbre mathématicien français, pour ses travaux en théorie des nombres, la « reine des mathématiques », selon l'expression de Gauss. Les années suivantes, le prix a plutôt été décerné à des travaux fondamentaux dans les domaines des mathématiques « pures », et une seule fois à un probabiliste. En 2012, le prix Abel vient d'être attribué à un mathématicien hongrois, Endre Szemerédi, dont les travaux de mathématiques combinatoires mettent en relation la théorie des nombres, la théorie de l'ergodicité, faisant partie des mathématiques « pures », l'informatique théorique et l'analyse de systèmes technologiques très complexes comme ceux des interconnexions de réseaux du type Google. Autrement dit une œuvre qui traverse les frontières entre mathématiques pures et applications.

Ce double visage des mathématiques, entre pureté et applications, n'est pas fidèlement reflété dans l'enseignement.

Prenons à titre d'exemple historique le cas de l'École polytechnique, créée par le grand mathématicien Gaspard Monge. Auparavant, à l'École royale du génie de Mézières, où il a enseigné pendant vingt ans, la formation des ingénieurs devait comprendre un apprentissage de la représentation de l'espace, des volumes et des surfaces. Cela passait par la stéréotomie, l'art de tracer les formes à donner aux pierres en vue de leur assemblage. À Mézières, Monge introduit les rudiments de la géométrie descriptive qu'il appelle encore « méthode de la coupe des pierres ».

Avec la création de l'École polytechnique, Monge renverse le processus et fonde la géométrie descriptive, la stéréotomie devenant l'une de ses applications au même titre que deux autres, l'architecture et la fortification.

Puis peu à peu l'enseignement des mathématiques – en particulier la trigonométrie et l'analyse – va devenir central pour les futurs artilleurs. Avec la disparition des nécessités techniques des mathématiques pour l'artillerie, l'enseignement va exploiter les mathématiques pures comme outil de sélection. Elle est devenue discipline principale de sélection des élèves puis à partir des années soixante du siècle passé l'enseignement des mathématiques à Polytechnique a cherché à former des chercheurs de haut niveau en mathématiques fondamentales. Cependant, ces dernières années, devant l'irruption

des nouvelles applications des probabilités aux échanges boursiers, une partie des élèves s'est tournée vers les « mathématiques financières ». On a pu ainsi se vanter de l'excellence de la formation de nos étudiants qui ont fait la fortune des salles de marché (et parfois la leur !) avec des mathématiques financières, comme exemple supplémentaire de l'excellence de la formation mathématique des élites.

La situation aux États-Unis était très variée d'un État à l'autre jusqu'à une époque récente. À partir des années 2000, des tentatives ont été faites pour construire des programmes nationaux et des tests d'évaluation. La perspective envisagée est qu'à partir de 2014 existe un système centralisé au niveau fédéral incluant des programmes pour les lycées et collèges jusqu'à l'Université.

Les programmes, rédigés par une commission de tendance conservatrice, ont pris une structure classique assez proche de ce que nous connaissons en France.

Devant cette évolution centralisatrice, un courant s'est développé qui conteste d'une part qu'il existe une voie unique que tous les étudiants des Collèges doivent emprunter, et d'autre part les opposants, dont le point de vue est synthétisé dans le texte de Garfunkel et Mumford que l'on va lire, affirment que les mathématiques qui doivent être enseignées sont celles qui ont un rapport avec la vie réelle des futurs citoyens vivant dans le monde du XXI^e siècle. En particulier, Garfunkel et Mumford donnent un rôle central à une interaction entre les mathématiques et le « monde réel », la modélisation.

En France, on ne peut que constater l'opposition entre l'excellence de l'élite des chercheurs (quelques centaines) et l'affaiblissement de l'enseignement général. Il y a déjà un enseignement à deux vitesses dans les lycées et les collèges. Y a-t-il une relation entre l'abstraction exagérée des programmes et l'élitisme social de l'enseignement et de son organisation, unanimement constaté par les études de l'OCDE comme par la Cour des comptes en avril 2012 ? La contribution de Michael Harris aborde cet aspect de l'enseignement.

Que faire ?

Le contexte de la crise générale de l'École, sur fond d'un affaiblissement des valeurs culturelles, exige que soit stimulé le désir d'apprendre des élèves. Et montrer que le savoir abstrait peut avoir des conséquences pratiques dans leur vie peut être l'un des moyens. Ça sert à tout ! (For all practical purposes) est le titre d'un volume de mathématiques édité par le Consortium for mathematics and its applications (COMAP) qui a eu un très large succès aux États-Unis et, récemment, une série de fascicules sur les mathématiques a connu une large audience en Espagne puis en France, sous le titre Le monde est mathématique !

Mais il ne s'agit aucunement de bouleverser de fond en comble notre enseignement, ni de recopier en les caricaturant les propositions de Garfunkel et Mumford : ils ne proposent certainement pas de remplacer l'étude de l'algèbre par celle des mathématiques financières !

Par contre nous pensons que le débat doit porter sur l'idée d'un cheminement inverse de celui d'une présentation axiomatique qui s'est révélée trop abstraite, d'une démarche heuristique partant des exemples du « monde réel » et favorisant des allers-retours entre théorie et pratique. Certains outils informatiques incitent d'ailleurs à une pédagogie de l'algèbre et de ses structures, comme nous le montre la contribution d'Alexandre Borovik.

De plus, chaque élève a sa perception des mathématiques, ce qu'explique bien Yves Meyer, et il faut chercher à personnaliser la formation.

Des expériences ont déjà eu lieu ces dernières années (voir les contributions de Dominique Barbolosi et de Michèle Artigue) dans le cas, par exemple, de la fonction exponentielle dans les sciences physiques et biologiques ou dans l'économie. Ces expériences méritent d'être mieux connues et systématisées. On en trouvera des modèles dans Teachers College Mathematical Modeling Handbook ⁽⁴⁾, mais aussi dans des manuels français de sciences appliquées. D'autres domaines pourraient être exploités de ce point de vue d'un enseignement rénové des mathématiques, par exemple l'étude du choix de système de votes.

Cette conception heurte bien sûr le point de vue classique qui domine largement dans l'enseignement français, celui pour lequel les mathématiques doivent être enseignées en elles-mêmes, pour leur beauté, leur harmonie et leur pureté. On pourrait faire remarquer à ce propos que l'étude de mathématiques moins abstraites ne signifie pas une perte de la dimension esthétique, comme le montrent par exemple les travaux d'Archimède ou de Gauss !

Et l'attrait pour les mathématiques, en s'aidant de cet aspect « pratique », pourrait concilier, selon l'ancienne maxime chinoise, l'utilité de l'utile comme celle de l'inutile !

Jean-Michel KANTOR

(4) Livret publié par l'université Colombia et le COMAP ; voir : <http://www.comap.com/modelingHB/index.html>